ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ.135

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ51

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ.23

Α4.

α) Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \in R$ ισχύει

$f(x+1) = (x+1)e^{-x}$

(Θέτουμε $u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$,$u \in R$)

Οπότε $f(u) = ue^{1-u}$,$u \in R$

Άρα $f(x) = xe^{1-x}$,$x \in R$

Β2. $D_f = R$.Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη , ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Είναι $f'(x) = (x)' e^{1-x} + x\left(e^{1-x}\right)' = e^{1-x} + xe^{1-x}(1-x)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$

Επομένως η συνάρτηση f:

- είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$ και ισχύει
$f'(x)>0$ στο $(-\infty,1)$
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)<0$ στο $(1,+\infty)$
- παρουσιάζει μέγιστο στο 1 , το $f(1)=1$

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη , ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=(1-x)'e^{1-x}+(1-x)\left(e^{1-x}\right)'=-e^{1-x}+(1-x)e^{1-x}(1-x)'$$
$$=-e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}=(x-2)e^{1-x}$$

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>2$, $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		Σ.Κ	

Επομένως η συνάρτηση f:

- είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty,2]$ και ισχύει $f''(x)<0$ στο $(-\infty,2)$
- είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και ισχύει $f''(x)>0$ στο $(2,+\infty)$
- παρουσιάζει καμπή στο σημείο $\mathrm{K}(2,f(2))$. Είναι $f(2)=2\cdot e^{-1}=\dfrac{2}{e}$

Άρα είναι $\mathrm{K}(2,\frac{2}{e})$

Η f είναι συνεχής στο R άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\dfrac{e}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ex}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(ex)'}{\left(e^x\right)'}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e}{e^x} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Άρα η ευθεία $\varepsilon : \psi = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} =$

$\left(\text{θέτουμε } u = 1-x \text{ , οπότε } \lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty\right)$

$= \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$

B4. i) Η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, 1]$ άρα

$f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$

Πράγματι είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{1-x}\right) = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$

Η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$ άρα

$f(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = (0, 1]$

Άρα $f(R) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$

ii)

- Αν $\lambda > 1$ τότε $\lambda \notin f(R)$ οπότε εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη στο R
- Αν $\lambda \leq 0$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$

Άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$:

-- έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_1, που είναι μοναδική αφού $f \uparrow A_1$

-- δεν έχει ρίζα στο A_2

Άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο R

- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \in f(A_2)$

Άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$:

-- έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_1, που είναι μοναδική αφού $f \uparrow A_1$

-- έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_2, που είναι μοναδική αφού $f \downarrow A_2$

Άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο R

- Αν $\lambda = 1$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = 1$ έχει ακριβώς μια λύση την $x = 1$.Πράγματι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 1 , άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(x) \leq f(1) = 1$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Για x<0 η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

Για $0 < x \le \frac{3\pi}{2}$ η $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ άρα είναι συνεχής

Στο 0 ελέγχουμε με τον ορισμό αν είναι συνεχής

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{η f είναι συνεχής και στο 0}$$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A_f = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

Την παραγωγισιμότητα στο 0 θα την ελέγξουμε με τον ορισμό

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(x)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(x)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(\alpha x^2 - 3x - 1\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\alpha x^2 - 3x - 1\right) = -1$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Γ2. i)

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = -\eta\mu x$
- $\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(\frac{3\pi}{2}) = 0 \end{array}\right\}$ Δεν ικανοποιείται η 3η συνθήκη του θεωρήματος Rolle

ii) στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$, $f'(x)=-\eta\mu x$

η εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \overset{x\in(0,3\pi/2)}{\Longleftrightarrow} x=\pi$

Γ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη για $x<0$

Για x<0 έχουμε $f'(x)=3\alpha x^2-6x-1$

Η διακρίνουσα της f' είναι $\Delta=(-6)^2-4\cdot 3\alpha\cdot(-1)=36+12\alpha<0$

Διότι $\alpha<-3 \Leftrightarrow 12\alpha<-36 \Leftrightarrow 12\alpha+36<-36+36 \Leftrightarrow 12\alpha+36<0 \Leftrightarrow \Delta<0$

Επομένως η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη για x<0 και μάλιστα ισχύει $f'(x)<0$ (αφού $\Delta<0$ και $3\alpha<0$)

Γ4.

- Για x<0, $f'(x)<0$
- Για $0<x\le\dfrac{3\pi}{2}$, $f'(x)=-\eta\mu x$

x	0		π		$3\pi/2$
$\eta\mu x$		$+$	0	$-$	
$-\eta\mu x$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Επομένως, ο πίνακας μονοτονίας της f είναι

x		0		π		$3\pi/2$
f'	$-$		$-$	0	$+$	
f	↘		↘		↗	

- Η $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)\cup(0,\pi)$ και συνεχής στο $(-\infty,\pi]$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\pi]$
- Η $f'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ και συνεχής στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$
- Η f έχει ολικό ελάχιστο για x=π την τιμή $f(\pi)=\text{συν}\pi=-1$ επομένως ισχύει $f(x)\geq f(\pi)=-1$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η εξίσωση $\ln x=\frac{1}{x}$ γράφεται $\ln x-\frac{1}{x}=0$ και έχει νόημα για x>0

Η συνάρτηση $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ συνεχής στο $[1,e]$ και ισχύει

$g(1)\cdot g(e)=(\ln 1-1)\left(\ln e-\frac{1}{e}\right)=-1\left(1-\frac{1}{e}\right)<0$ επομένως από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 στο $(1,e)$, η οποία είναι μοναδική αφού $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2.

$$f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{x_0\cdot x}$$

x	0		x_0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το

$$f(x_0)=\ln x_0\cdot(x_0+1)-\ln x_0-1\overset{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}{=}\frac{1}{x_0}(x_0+1)-\frac{1}{x_0}-1=1+\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}-1=0$$

Δ3.

- Αν $x\le 0$ ισχύει $g(x)\le 0<h(x)$ οπότε η εξίσωση $g(x)=h(x)$ είναι αδύνατη
- Αν $x>0$,

η εξίσωση

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow \ln g(x)=\ln h(x)\Leftrightarrow \ln\left(x\cdot e^{-x}\right)=\ln\left[\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\right]\Leftrightarrow \ln\left(x\cdot e^{-x}\right)=(x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)(\ln x_0-1)\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)(\ln x_0-1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0-x-1=\ln x-x\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0-x-1-\ln x+x=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)=0$$

Η οποία λόγω του Δ2 έχει μοναδική λύση το x_0, δηλαδή $g(x_0)=h(x_0)$

Για να δείξουμε ότι η g και η h έχουν κοινή εφαπτομένη στο x_0 αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(x_0)=h'(x_0)$

$g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$ επομένως $g'\left(x_0\right)=e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}=e^{-x_0}\left(1-x_0\right)$

$$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot(\ln x_0-1)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0}\cdot\left(\frac{x_0}{e}\right)\cdot(\ln x_0-1)=$$

$$=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0}\cdot\left(\frac{x_0}{e}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_0}-1\right)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0}\cdot\left(\frac{x_0}{e}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_0}-1\right)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0}\cdot\left(\frac{x_0}{e}\cdot\frac{1}{x_0}-\frac{x_0}{e}\right)$$

$$=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0}\cdot\frac{1-x_0}{e}=\frac{{x_0}^{x_0}}{e^{x_0}}\cdot\frac{1-x_0}{e}$$

Όμως αφού x_0 ρίζα της εξίσωσης $\ln x=\frac{1}{x}$ προκύπτει ότι

$$\ln x_0=\frac{1}{x_0}\Leftrightarrow x_0\cdot\ln x_0=1\Leftrightarrow\ln\left({x_0}^{x_0}\right)=1\Leftrightarrow\boxed{{x_0}^{x_0}=e}$$

Επομένως $h'(x_0)=\frac{{x_0}^{x_0}}{e^{x_0}}\cdot\frac{1-x_0}{e}=\frac{e}{e^{x_0}}\cdot\frac{1-x_0}{e}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}=e^{-x_0}(1-x_0)=g'(x_0)$

Δ4.

$$AB=\left|f(x)-\phi(x)\right|\overset{f(x)>\phi(x)}{=}f(x)-\phi(x)$$

- Αν η ϕ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι κρίσιμο σημείο
- Αν η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η συνάρτηση $K(x)=f(x)-\phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $A_K=(0,+\infty)$ και η Κ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 επομένως από θεώρημα Fermat ισχύει $K'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)-\phi'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=\phi'(x_0)\Leftrightarrow\phi'(x_0)=0$