

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1: Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 76.

A2: Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 155.

A3: Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 222.

A4: α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \geq 1$ και $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \geq 1$.

Άρα $D_f = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ και

$$h(x) \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2} - 1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Επομένως $D_f = (1, +\infty)$ και $f(x) = \frac{g}{h}(x) = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2} + 1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x^2} - 1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$.

$D_r = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ και

$$r(x) = (g \cdot h)(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$$

B2. Έχουμε $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$ και

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1) - (x-1)(x+1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, άρα και 1-1 και αντιστρέψιμη.

Για την αντίστροφη:

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)y = x+1 \Leftrightarrow xy - y = x+1 \Leftrightarrow xy - x = y+1 \Leftrightarrow x(y-1) = y+1$$

$$\stackrel{y \neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{y+1}{y-1}$$

Και $x \in (1, +\infty)$, άρα

$$\frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow y > 1 \Leftrightarrow y \in (1, +\infty)$$

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x \in (1, +\infty)$. Επομένως $D_f = D_{f^{-1}}$ και $f(x) = f^{-1}(x)$.

B3. $r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$

Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

Η $r(x)$ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Πλάγια ασύμπτωτη:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0.$$

Άρα πλάγια ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$ είναι η $y = x$.

B4. Για να έχει νόημα η εξίσωση πρέπει $x \in D_f$ δηλαδή $x > 1$ και $x \in D_r$ δηλαδή $x > 1$. Συνεπώς, $x > 1$.

$$\text{Οπότε έχουμε } (f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - 4 \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4) \cdot (x^2-1) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 4$ Δεκτή ή $x = \pm 1$, οι οποίες απορρίπτονται λόγω των περιορισμών

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $D_f = [0, +\infty)$ άρα και στο 2, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2), \text{ όπου:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 + \lambda = 1 + \lambda$$

Και

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 4 + e^\lambda) = e^\lambda,$$

Επομένως $e^\lambda = 1 + \lambda$. Γνωρίζουμε ότι $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει **μόνο** για $x = 0$, συνεπώς:

$$e^\lambda = 1 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Γ2. Για $\lambda = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Για $0 \leq x < 2$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2 < 0$.

Για $x > 2$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x + 4 = 2(2 - x) < 0$ για $x > 2$.

Επομένως: $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 2) \cup (2, +\infty)$ και η f συνεχής στο 2, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 0$, το $f(0) = 5$.

Γ3. i) Η f είναι συνεχής στο D_f , άρα και στο $[0, 3]$. Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$$

Και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x - 2)^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2 - x) = 0$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο 2, επομένως **δεν** ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[0, 3]$.

Γ3. ii) $f(0) = 5$ και $f(3) = 0$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, 5)$ και $E(3, 0)$ είναι:

$$\lambda = \frac{y_E - y_\Delta}{x_E - x_\Delta} = -\frac{5}{3}.$$

Για $x \in (0, 2)$ είναι $f'(x) = -2$, άρα η εξίσωση $f'(x) = -\frac{5}{3}$ στο διάστημα αυτό είναι αδύνατη.

Επιπλέον, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2, άρα η C_f δεν έχει πλάγια ή οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Τέλος, για $x \in (2, 3)$ είναι $f'(x) = -2x + 4$, άρα:

$$f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2x + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{17}{6} \text{ (δεκτή)}$$

Επομένως, η εφαπτομένη της C_f στο $\Gamma(\xi, f(\xi))$, με $\xi = \frac{17}{6}$ είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ και E .

Γ4. Έστω $y(t)$ η κατακόρυφη απόσταση που διανύει το M τη χρονική στιγμή $t \geq 0$.

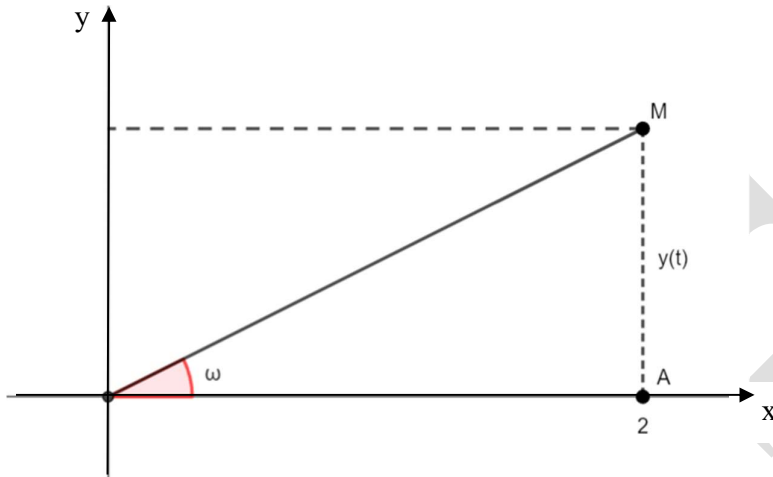
Τότε, $\epsilon\varphi\omega(t) = \frac{y(t)}{2}$, $t \geq 0$ και

$$(\epsilon\varphi\omega(t))' = \left(\frac{y(t)}{2} \right)' \Leftrightarrow \frac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} = \frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow \omega'(t) = \frac{y'(t) \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}{2}$$

όπου, $y'(t) = 0,5 \text{ μονάδες / sec}$

$$\text{Άρα, } \omega'(t) = \frac{0,5 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}{2} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}{4}, \quad t \geq 0$$

Αν t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το M θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της f .



Τότε, $y(t_0) = f(2) = 1$ και την ίδια χρονική στιγμή είναι

$$(OM) = \sqrt{OA^2 + AM^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \text{ και συνεπώς, } \sigma\upsilon\nu\omega(t_0) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Τέλος, } \omega'(t_0) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)}{4} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{4} = \frac{4}{4 \cdot 5} = \frac{1}{5} \text{ rad / sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(\ln x + \alpha x)' x - (\ln x + \alpha x)(x)'}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{x} + \alpha\right)x - \ln x - \alpha x}{x^2} = \\
 &= \frac{1 + \alpha x - \ln x - \alpha x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}
 \end{aligned}$$

- $x^2 > 0$ επομένως το πρόσημο της f' είναι ίδιο με την παράσταση του αριθμητή

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow e > x$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow 1 < \ln x \Leftrightarrow \ln e < \ln x \Leftrightarrow e < x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow \ln e = \ln x \Leftrightarrow e = x$$

x	0	e	+∞
f'(x)	+	-	
f(x)		T.M	

- $f'(x) > 0$ στο $(0, e)$ και η f συνεχής στο $(0, e]$ επομένως $f \nearrow$ στο $(0, e]$
- $f'(x) < 0$ στο $(e, +\infty)$ και η f συνεχής στο $[e, +\infty)$ επομένως $f \searrow$ στο $[e, +\infty)$
- Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = e$ την τιμή $f(e) = \frac{1 + \alpha e}{e} = \frac{1}{e} + \alpha$

Όμως το σύνολο τιμών της είναι το $\left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$, δηλαδή η μέγιστη τιμή της f είναι

$$1 + \frac{1}{e} \text{ επομένως ισχύει } 1 + \frac{1}{e} = \alpha + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Δ2.

- Η f είναι συνεχής και \nearrow στο $\Delta_1 = (0, e]$ επομένως f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$ αφού

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\ln 2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -2 \ln 2 + 1 = -\ln 4 + 1 = -\ln 4 + \ln e = \ln \frac{e}{4} < 0$$

$$\left(\frac{e}{4} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{e}{4} < \ln 1 \Leftrightarrow \ln \frac{e}{4} < 0\right) \text{ και } f(1) = \frac{\ln 1 + 1}{1} = 1 > 0$$

Επομένως από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0

στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ που είναι όμως μοναδική αφού η f είναι συνεχής και \nearrow στο $\Delta_1 = (0, e]$

- Η f είναι συνεχής και \searrow στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$ άρα

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e)\right) = \left(1, 1 + \frac{1}{e}\right]$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)'}{(x)'} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Το $0 \notin f(\Delta_2)$ επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο Δ_2

Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Δ3. i)

$$\text{Παρατηρούμε ότι } f(4) = \frac{\ln 4 + 4}{4} = \frac{\ln 2^2 + 4}{4} = \frac{2 \ln 2 + 4}{4} = \frac{\ln 2 + 2}{2} = f(2)$$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = f(4)$ γράφεται ισοδύναμα και με τη μορφή $f(x) = f(2)$

Επομένως, στο $\Delta_1 = (0, e]$, έχουμε $f(x) = f(4) \Leftrightarrow f(x) = f(2) \stackrel{f'}{f^{1-1}} \Leftrightarrow \boxed{x = 2}$

Επομένως, στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$, έχουμε $f(x) = f(4) \stackrel{f'}{f^{1-1}} \Leftrightarrow \boxed{x = 4}$

ii)

$$\begin{aligned} 2^x \leq x^2 \stackrel{2^x, x^2 > 0}{\Leftrightarrow} \ln(2^x) \leq \ln(x^2) &\Leftrightarrow x \ln 2 \leq 2 \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \geq \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 \geq \frac{\ln 2}{2} + 1 &\Leftrightarrow \frac{\ln x + x}{x} \geq \frac{\ln 2 + 2}{2} \Leftrightarrow \boxed{f(x) \geq f(2) = f(4)} \quad (1) \end{aligned}$$

Επομένως,

στο $\Delta_1 = (0, e]$, $f(x) \geq f(2) \stackrel{f'}{f^{1-1}} \Leftrightarrow \boxed{x \geq 2}$

στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$, $f(x) \geq f(4) \stackrel{f'}{f^{1-1}} \Leftrightarrow \boxed{x \leq 4}$

άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $x \in [2, 4]$

Δ4.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με $E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^0 |g(x)| dx = \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx$

$$\text{Θέτουμε } e^x = u \Rightarrow \boxed{x = \ln u} \quad \text{με} \quad \boxed{dx = \frac{1}{u} du}$$

- Για $x = -\ln 2 \Rightarrow u = e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$, $x = 0 \Rightarrow u = e^0 = 1$

Επομένως,

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u} \right| \frac{1}{u} du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u^2} \right| du = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u) \cdot f'(u)| du \end{aligned}$$

Ισχύει $f'(u) > 0$ στο $(0, e]$ άρα και στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ενώ η $f(u)$ έχει μοναδική λύση

x_0 στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ από το ερώτημα Δ2.

Επομένως, για $\frac{1}{2} < u < x_0 \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u) < f(x_0) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < \boxed{f(u)} < 0$

Και για $x_0 < u < 1 \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(u) < f(1) \Leftrightarrow \boxed{0 < f(u)} < f(1)$

Δηλαδή τελικά, $f(u) \cdot f'(u) > 0$ στο $[x_0, 1]$ και $f(u) \cdot f'(u) < 0$ στο $[1, x_0]$

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u) \cdot f'(u)| du = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} |f(u) \cdot f'(u)| du + \int_{x_0}^1 |f(u) \cdot f'(u)| du = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u) \cdot f'(u) du + \int_{x_0}^1 f(u) \cdot f'(u) du = \left[-\frac{f^2(u)}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_{x_0}^1 = \\ &= -\frac{f^2(x_0)}{2} + \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} - \frac{f^2(x_0)}{2} \stackrel{f(x_0)=0}{=} \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} = \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right) + f^2(1)}{2} = \\ &= \frac{\left(\frac{\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\frac{\ln 1 + 1}{1}\right)^2}{2} = \frac{\left(2\ln \frac{1}{2} + 1\right)^2 + 1}{2} = \frac{(-2\ln 2 + 1)^2 + 1}{2} \tau.μ \end{aligned}$$