ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Σχόλιο:

Τα θέματα κρίνονται αρκετά απαιτητικά και απευθύνονται σε μαθητές με κατάλληλο υπόβαθρο και σωστή προετοιμασία.
Το Α θέμα ζητάει όχι κλασσική απόδειξη που ενδεχομένως να ταλαιπωρήσει τους μαθητές.
Το Β θέμα είναι ένα βατό θέμα στατιστικής που επιβάλλεται να επιλύσουν οι μαθητές.
Το Γ θέμα είναι στη πλειοψηφία του ένα προσιτό θέμα άλγεβρας.
Το Δ θέμα είναι κλιμακούμενης δυσκολίας με τις τελευταίες μονάδες να απαιτούν ιδιαίτερη σκέψη.

ΘΕΜΑ Α

Α1: Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 93.
Α2: Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 16.
Α3: α) Λ β)Σ γ)Σ δ)Σ ε)Λ
Α4: α) 0 β) 2x

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει: $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=\nu \Rightarrow \nu_1+40=50 \Rightarrow \nu_1=10$

Γνωρίζουμε ότι $f_i\%=\frac{\nu_i}{\nu}100$ οπότε:

$$f_1\%=\frac{10}{50}100=20\%$$
$$f_2\%=\frac{15}{50}100=30\%$$
$$f_3\%=\frac{11}{50}100=22\%$$
$$f_4\%=\frac{8}{50}100=16\%$$

$$f_5\% = \frac{6}{50}100 = 12\%$$

Επίσης για τις αθροιστικές συχνότητες ισχύει:
$N_1 = \nu_1 = 10$
$N_2 = \nu_1 + \nu_2 = 25$
$N_3 = \nu_3 + N_2 = 36$
$N_4 = \nu_4 + N_3 = 44$

Επομένως ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
ΣΥΝΟΛΟ	50	100	

Β2. $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 0 + 0{,}3 + 0{,}44 + 0{,}48 + 0{,}48 = 1{,}7$ ώρες

Β3. $\nu = 50$ άρτιος άρα η διάμεσος δ ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων:

$$\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Β4. α) Το ζητούμενο ποσοστό είναι:
$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 20\% + 30\% + 22\% + 16\% = 88\%.$

β) Η νέα μέση τιμή δίνεται από τη σχέση $\bar{y} = \bar{x} + c$, άρα
$\bar{y} = 1{,}7 + 4 = 5{,}7.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha$
Για $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -6x^2 + 12x$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

Οπότε:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		

$f'(x) < 0$ στα $(-\infty, 0)$ και $(2, +\infty)$ και f συνεχής άρα f γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$.
$f'(x) > 0$ στο (0,2) και f συνεχής άρα f γνησίως αύξουσα στο [0,2].

Γ2. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0 το f(0)=α.
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 2 το

$$f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + \alpha = -16 + 24 + \alpha = 8 + \alpha.$$

Ισχύει: $\frac{\alpha+8+\alpha}{2} = -8 \Leftrightarrow 2\alpha + 8 = -16 \Leftrightarrow 2\alpha = -24 \Leftrightarrow \alpha = -12$

Γ3. Έχουμε $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$ και
$f'(x) = -6x^2 + 12x$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = \alpha x + \beta$.
Ισχύει $f'(1) = \alpha$.

$$f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = -6 + 12 = 6$$

Επίσης, $f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 12 = -2 + 6 - 12 = -8$

Άρα α=6 και η εξίσωση γίνεται: $y = 6x + \beta$.

Για x=1 έχουμε $-8 = 6 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -14$. Επομένως, $y = 6x - 14$.

Γ4.

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12, x \in \mathbb{R}$$

Για $x \in [2, +\infty)$ γνωρίζουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x=2.

Οπότε:
$x \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0$
Με διαίρεση κατά μέλη με τον αρνητικό αριθμό -2 προκύπτει:
$x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$ που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\lambda x^2+7x+\frac{2}{3}, x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0 \Leftrightarrow f'(1)=0$$

Για $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{3x^2}{3}+2\lambda x+7=x^2+2\lambda x+7$
$f'(1)=1^2+2\lambda\cdot 1+7=8+2\lambda$
$f'(1)=0 \Leftrightarrow 8+2\lambda=0 \Leftrightarrow 2\lambda=-8 \Leftrightarrow \lambda=-4$

Δ2.
Για $\lambda=-4$ η συνάρτηση γίνεται:
$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+7x+\frac{2}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.
Επίσης, $f'(x)=x^2-8x+7$ και
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-8x+7=0$.
$\Delta=64-28=36>0$ με ρίζες $x_1=7$ και $x_2=1$

x	$-\infty$	1		7		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	
$f(x)$	↗		↘		↗	

Επομένως,
$f'(x)>0$ στα $(-\infty,1)$ και $(7,+\infty)$ και f συνεχής άρα f γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,1]$ και $[7,+\infty)$.
$f'(x)<0$ στο (1,7) και f συνεχής άρα f γνησίως φθίνουσα στο [1,7].

Δ3. Παρατηρούμε ότι 2020, 2025 $\in[7,+\infty)$ όπου η f είναι γνησίως αύξουσα.
Δηλαδή $2020<2025 \Leftrightarrow f(2020)<f(2025) \Leftrightarrow f(2025)-f(2020)>0$

Επιπρόσθετα, $\frac{3}{2},\frac{5}{2}\in[1,7]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Δηλαδή $\frac{3}{2}<\frac{5}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)>0$

Συνεπώς η παράσταση Α αποτελείται από θετικό αριθμητή και θετικό παρονομαστή άρα Α>0.

Δ4.

$f'(x) = x^2 - 8x + 7$

$f''(x) = 2x - 8$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)-f''(x)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+7-2x+8+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-10x+16}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-10x+16)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-8)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\sqrt{3}^2} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-8)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{x+1-3} = (2-8)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) = -6\cdot 2\cdot\sqrt{3} = -12\sqrt{3}.$$