

## ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2023 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω  $x_1, x_2 \in \Delta$ , με  $x_1 < x_2$ . Θα δείξουμε ότι  $f(x_1) < f(x_2)$ . Πράγματι, στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή  $f'(\xi) > 0$  και  $x_2 - x_1 > 0$  έχουμε  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , οπότε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

- A2.** Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ , τότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ .

- A3.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

**A4.**

- α)** Σωστό,      **β)** Λάθος,      **γ)** Σωστό,      **δ)** Λάθος,      **ε)** Σωστό.

### ΘΕΜΑ Β

- B1.** Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, με:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 2)$$

| $x$     | $-\infty$                                                                           | 0 | 2                                                                                   | $+\infty$ |                                                                                     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$ | +                                                                                   | 0 | −                                                                                   | 0         | +                                                                                   |
| $f(x)$  |  |   |  |           |  |

- $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$  και η  $f$  συνεχής στο  $(-\infty, 0]$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0]$ .

- $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (0, 2)$  και η  $f$  συνεχής στο  $[0, 2]$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, 2]$ .
- $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (2, +\infty)$  και η  $f$  συνεχής στο  $[2, +\infty)$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[2, +\infty)$ .

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, για  $x = 0$ , το  $f(0) = 2$ , και τοπικό ελάχιστο, για  $x = 2$ , το  $f(2) = -2$ .

**B2.** Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη, με:

$$f''(x) = 6x - 6 = 6 \cdot (x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Είναι:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

| $x$      | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|----------|-----------|---|-----------|
| $f''(x)$ | —         | 0 | +         |
| $f(x)$   |           |   |           |

Η  $f$  είναι κοίλη στο  $(-\infty, 1]$ , κυρτή στο  $[1, +\infty)$ , και το  $A(1, f(1))$ , δηλαδή το  $A(1, 0)$ , είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

**B3.** Έχουμε ότι:

$$I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right]_1^2 = \dots = -\frac{5}{4}$$

**B4.** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - e^x, \quad x \in [0, 1].$$

Ισχύουν  $g(0) = f(0) - e^0 = 1 > 0$  και  $g(1) = f(1) - e^1 = -e < 0$ . Οπότε:

- $g(0) \cdot g(1) < 0$  και
- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει στο  $(0, 1)$  μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^x.$$

**Γ1.** Είναι  $D_g = D_h = (0, +\infty)$ , άρα:

$$\begin{aligned} D_{g \circ h} &= \{x \in D_h \mid h(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) \mid \ln x > 0\} = \{x > 0 \mid \ln x > \ln 1\} = \\ &= \{x > 0 \mid x > 1\} = (1, +\infty). \end{aligned}$$

Τύπος:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}, \quad x > 1.$$

Οπότε:

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}, \quad x \in (1, +\infty).$$

**Γ2.** Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$ , με:

$$f'(x) = \frac{(x + 1)'(x - 1) - (x + 1)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2} = -\frac{2}{(x - 1)^2} < 0 \quad \forall x > 1$$

άρα  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε και  $1 - 1$  (αντιστρέψιμη). Επιπλέον,

$$f((1, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (1, +\infty) = D_{f^{-1}},$$

όπου:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ (x + 1) \cdot \frac{1}{x - 1} \right] \xrightarrow{2 \cdot (+\infty)} +\infty,$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0 \quad \text{και} \quad x - 1 > 0 \quad \text{όταν} \quad x \rightarrow 1^+$$

Συνεπώς,  $D_f = D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$ . Επιπλέον,

$$f(x) = y \xLeftrightarrow{y > 1} \frac{x + 1}{x - 1} = y \Leftrightarrow x + 1 = yx - y \Leftrightarrow (y - 1)x = y + 1 \xLeftrightarrow{y > 1} x = \frac{y + 1}{y - 1}$$

δηλαδή:

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 1}{y - 1}, \quad \text{με} \quad y > 1$$

οπότε:

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{x - 1}, \quad \text{με} \quad x \in (1, +\infty)$$

Επομένως:  $f^{-1} = f$ .

**Γ3.** Από το (Γ2) έχουμε ότι:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ , άρα η  $x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ . Η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει άλλη κατακόρυφη ασύμπτωτη, διότι είναι συνεχής (ως ρητή) στο  $(1, +\infty)$ . Επιπλέον,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , άρα η ευθεία  $y = 1$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ , (επομένως δεν μπορεί να έχει και πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ ).

- Γ4.** Είναι:  $f(x) > 1$  και  $-1 \leq \sin x \leq 1$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .  
 Συνεπώς:  $f(x) > \sin x$ , για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ ,  
 άρα η εξίσωση  $f(x) = \sin x$  είναι αδύνατη στο διάστημα αυτό.

## ΘΕΜΑ Δ

### Δ1.

- i)** Θα δείξουμε ότι η εξίσωση  $f(x) = -x + 2$  έχει ρίζα στο  $[1, 2]$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) + x - 2, \quad x \in [1, 2].$$

Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$  ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (η  $f$  είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και η  $\varphi(x) = x - 2$  ως πολυωνυμική). Επιπλέον,

$$g(1) = f(1) + 1 - 2 = -1 < 0 \quad \text{και} \quad g(2) = f(2) + 2 - 2 = 2 > 0,$$

δηλαδή  $g(1) \cdot g(2) < 0$ . Από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει στο  $(1, 2) \subseteq [1, 2]$  μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -x + 2.$$

- ii)** Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(2, f(2))$  έχει εξίσωση:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = x,$$

δηλαδή η ευθεία  $(\varepsilon_2)$  εφάπτεται της  $C_f$  στο  $A$ .

- Δ2.** Είναι  $f''(x) < 0$ , για κάθε  $x \in [1, 2]$ , άρα η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, 2]$ , οπότε:

$$1 < x < 2 \xRightarrow{f' \searrow} f'(x) > f'(2),$$

απ' όπου έχουμε:

$$f'(x) > 1 > 0, \quad \text{δηλαδή} \quad f'(x) > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (1, 2)$$

και η  $f$  συνεχής στο  $[1, 2]$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και  $1-1$ . Επομένως:

$$f([1, 2]) = [f(1), f(2)] = [0, 2] = D_{f^{-1}}.$$

- Δ3.** Για  $x \in (1, 2)$ ,

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, x]$  και
- παραγωγίσιμη στο  $(1, x)$ .

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει  $\xi_1 \in (1, x)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x)}{x - 1}$$

Επίσης,

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x, 2]$  και
- παραγωγίσιμη στο  $(x, 2)$ .

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει  $\xi_2 \in (x, 2)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} = \frac{2 - f(x)}{2 - x}$$

Όμως,

$$\xi_1 < \xi_2 \xRightarrow{f' \searrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x)}{x - 1} > \frac{2 - f(x)}{2 - x}, \quad \forall x \in (1, 2).$$