

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

A.1. Σχολικό βιβλίο σελ. 133

A.2. Σχολικό βιβλίο σελ. 73

A.3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 128

A.4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Λάθος

Θέμα Β

B.1. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)' = -\frac{(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2} = -\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} > 0 \Rightarrow f \text{ γν. αύξουσα}$$

άρα 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

Αντίστροφη:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1-\sqrt{x}} = y \Leftrightarrow 1 = y \cdot (1-\sqrt{x}) \Leftrightarrow 1 = y - y\sqrt{x} \Leftrightarrow y\sqrt{x} = y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x} = \frac{y-1}{y} \text{ με } y \neq 0 \text{ και } \frac{y-1}{y} > 0 \Leftrightarrow x = \left(\frac{y-1}{y} \right)^2 \text{ με } y \neq 0 \text{ και } \frac{y-1}{y} > 0.$$

$$\text{Όμως, } x > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{y-1}{y} \right)^2 > 1 \Leftrightarrow \frac{y-1}{y} > 1 \Leftrightarrow \frac{y-1}{y} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y-1-y}{y} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow y < 0$$

$$\text{Οπότε, } f^{-1}(y) = \left(\frac{y-1}{y} \right)^2 \text{ με } y < 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 \text{ με } x < 0$$

B.2. $D_{\text{gof}^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} / f^{-1}(x) \in D_g\} = \{x < 0 / f^{-1}(x) \in [0, +\infty)\} = (-\infty, 0)$ γιατί

$$f^{-1}(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x \neq 0 .$$

$$h(x) = g(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = \left|\frac{x-1}{x}\right|^{x < 0 \text{ και } x-1 < 0} = \frac{x-1}{x} , x < 0 .$$

B.3. Κατακόρυφες

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[(x-1) \cdot \frac{1}{x} \right] = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1 < 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h .

Οριζόντιες/Πλάγιες στο $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \beta = 1$$

Οπότε η ευθεία $y=0x+1 \Leftrightarrow y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

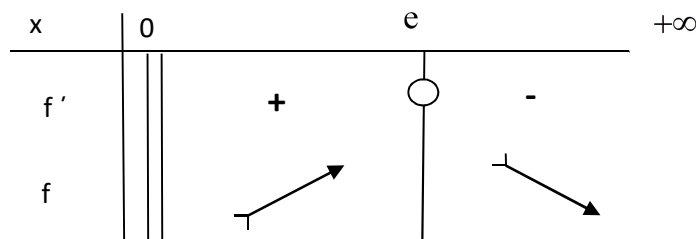
Θέμα Γ

$$\Gamma.1 \text{ Για κάθε } x \in (0, +\infty) , f'(x) = \frac{(\ln x)'x - (\ln x) \cdot x'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$$



Η f είναι γν.αύγουσα στο διάστημα $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο για $x_0 = e$, το $f(x_0) = \frac{1}{e}$

Γ.2. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$,

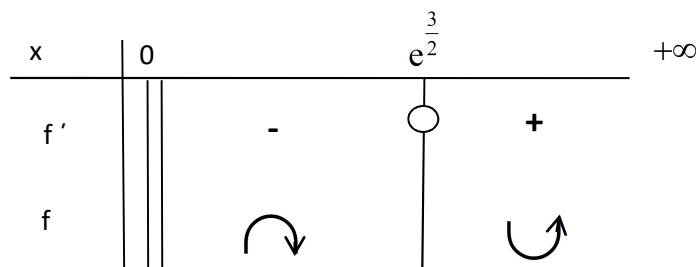
$$f''(x) = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)' = \frac{(1 - \ln x)' x^2 - (1 - \ln x) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x} x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$\frac{-x - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(-1 - 2(1 - \ln x))}{x^4} = \frac{-1 - 2 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} = 0 \stackrel{x^3 > 0}{\Leftrightarrow} -3 + 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} < 0 \stackrel{x^3 > 0}{\Leftrightarrow} -3 + 2 \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x < e^{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} > 0 \stackrel{x^3 > 0}{\Leftrightarrow} -3 + 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}}$$



Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, e^{\frac{3}{2}}]$ και κυρτή στο $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής

$$\text{το } A\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right) \rightarrow A\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Γ.3. $\Delta_1 = (0, e]$ $\xrightarrow[\text{και γν.αύγουσα}]{f \text{ συνεχής}}$ $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e)\right) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln x = -\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$\Delta_2 = [e, +\infty)$ $\xrightarrow[\text{και γν.φθίνουσα}]{f \text{ συνεχής}}$ $f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e)\right) = \left(0, \frac{1}{e}\right]$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Οπότε, } f((0, +\infty)) = (-\infty, \frac{1}{e}] \cup (0, \frac{1}{e}] = (-\infty, \frac{1}{e}]$$

Γ.4. Πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=k$ (1) για τις διάφορες τιμές του k :

Αν $k \leq 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει μία μοναδική λύση στο $\Delta_1 = (0, e]$

Αν $0 < k < \frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση (1) έχει δύο λύσεις, μία στο $\Delta_1 = (0, e]$ και μία στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$.

Αν $k = \frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την $x=e$ αφού

$$x < e \stackrel{\text{γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} f(x) < f(e) \Rightarrow f(x) < \frac{1}{e}$$

$$x > e \stackrel{\text{γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} f(x) < f(e) \Rightarrow f(x) < \frac{1}{e}$$

Αν $k > \frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση (1) είναι αδύνατη αφού αυτά τα k δεν ανήκουν στο σύνολο τιμών της f .

Θέμα Δ

Δ.1.

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x$$

$$\text{Εξ. εφαπτομένης της } C_f \text{ στο σημείο } A(x_0, f(x_0)): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Αφού διέρχεται από το σημείο $M(-1,0)$:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(-1 - x_0) \stackrel{f(x)=e^x}{\Rightarrow} -e^{x_0} = e^{x_0}(-1 - x_0) \stackrel{e^{x_0} \neq 0}{\Rightarrow} -1 = -1 - x_0 \Rightarrow x_0 = 0$$

(μοναδική λύση \Rightarrow μοναδική τέτοια εφαπτομένη)

$$\text{Οπότε, } y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$$

Δ.2. $g(x) = -x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -2x - 1$

Κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της g με την ευθεία $y=x+1$:

$$g(x) = x + 1 \Leftrightarrow -x^2 - x = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Θα δείξουμε ότι σε αυτό το σημείο η g εφάπτεται της ευθείας:

$$g'(-1) = -2(-1) - 1 = 2 - 1 = 1 = \lambda$$

Δ.3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow$ η f είναι κυρτή δηλαδή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο εκτός του σημείου επαφής στο οποίο είναι ίσες $\Rightarrow f(x) \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x_0 = 0$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ η g είναι κοίλη δηλαδή η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο εκτός του σημείου επαφής στο οποίο είναι ίσες $\Rightarrow g(x) \leq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x = -1$

Τελικά, $\left. \begin{array}{l} f(x) \geq x + 1 \geq g(x) \\ \text{οι ισότητες ισχύουν για διαφορετικά } x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) > g(x)$