ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΠΑΛΑΙΟ

ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 106

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161

Α4. α)Λ β)Λ γ) Σ δ)Σ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f'(x)=\left[(x+a)^2-1\right]'=2(x+a), x\ge -1$$

Η κλίση της C_f στο σημείο με τετμημένη 0 είναι 2, άρα $f'(0)=2\Leftrightarrow 2a=2\Leftrightarrow a=1$.

Β2.

$$f(x)=(x+1)^2-1=x^2+2x, x\ge -1$$

$$f'(x)=2x+2, x\ge -1$$

Είναι $f'(x)\ge 0$ για κάθε $x\ge -1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = -1, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$, οπότε η f είναι 1-1 άρα και αντιστρέψιμη.

Έστω $x\ge -1$ με

$$f(x)=y \Leftrightarrow (x+1)^2-1=y \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x+1)^2=y+1 \Leftrightarrow |x+1|=\sqrt{y+1} \Leftrightarrow x+1=\sqrt{y+1} \Leftrightarrow x=\sqrt{y+1}-1 \\ y \geq -1\end{cases}$$

Άρα $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1, x \geq -1$

B3. Η $f^{-1} \circ g$ ορίζεται αν

$$\begin{cases}x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ g(x) \in D_{f^{-1}} \Leftrightarrow x^2-1 \geq -1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Οπότε, $(f^{-1} \circ g)(x)=|x|-1, x \in \mathbb{R}$

B4.

$$\lim_{x \to -1} \frac{f^{-1}(x)+1}{(f^{-1} \circ g)(x)}=\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+1}}{|x|-1}=\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+1}}{-x-1}$$

$$=\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+1}}{-(x+1)}=\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+1}}{-\sqrt{(x+1)}^2}=\lim_{x \to -1} \frac{1}{-\sqrt{x+1}}=-\infty$$

αφού $\sqrt{\chi+1}>0$ κοντά στο -1

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=(e^{ax})'=ae^{ax}$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο $M(x_0,f(x_0))$ είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$$
$$y-e^{ax_0}=ae^{ax_0}(x-x_0) \Leftrightarrow$$
$$y=ae^{ax_0}x+e^{ax_0}(1-ax_0)$$

Άρα $\begin{cases}ae^{ax_0}=e \\ e^{ax_0}(1-ax_0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ae=e \\ 1=ax_0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1 \\ 1=x_0\end{cases}$

Γ2.

$$g'(x)=e\frac{1}{x+1}(x+1)'=\frac{e}{x+1}, x>-1$$

$g'(x_1)=e \Leftrightarrow \frac{e}{x+1}=e \Leftrightarrow x=0$

$y-g(0)=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=ex$

Επομένως, η ε εφάπτεται της Cg στο σημείο O(0,0)

Γ3.

Είναι $f'(x)=f''(x)=e^x>0$, άρα η f κυρτή στο R, δηλαδή η Cf βρίσκεται πάνω από την ε με εξαίρεση το σημείο επαφής M(1,e).

$g'(x)=\frac{e}{x+1}$

$g''(x)=-\frac{e}{(x+1)^2}<0, x>-1$

Άρα η g είναι κοίλη στο $(-1,+\infty)$ και βρίσκεται πάνω από την ε με εξαίρεση το σημείο επαφής O(0.0).

Οπότε $g(x)\le ex$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0

Και $ex\le f(x)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 1

Επομένως $g(x)<f(x)$ για κάθε x>-1, δηλαδή η Cf βρίσκεται πάνω από την Cg για κάθε x>-1.

Γ4.

$E=\int_0^1[f(x)-g(x)]dx=\int_0^1\left(e^x-e\ln(x+1)\right)dx=$

$\left[e^x\right]_0^1-e\int_0^1(x+1)'\ln(x+1)dx=$

$e-1-e\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1+e\int_0^1(x+1)\frac{1}{x+1}dx=$

$e-1-e(2\ln 2-1)=2e-1-2e\ln 2 \tau.\mu.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Αν $x \neq 0, xf(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$

Αφού f συνεχής στο 0, $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$. Άρα,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Δ2.

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$g'(x) = x\sigma\upsilon\nu x$

$g'(x) < 0, \gamma\iota\alpha\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$g'(x) > 0, \gamma\iota\alpha\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$g'(x) = 0, \gamma\iota\alpha\ x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}$

Οπότε η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=0 to g(0)=1.

Άρα $g(x) \geq 1 \Leftrightarrow x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \geq 1, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Δ3.

Για $\quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right)' = \frac{-\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x} = \frac{1 - g(x)}{x} < 0$, αφού:

$g(x) \geq 1, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0.

Και επειδή η f συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, θα ισχύει ότι η f γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ4. Προφανής ρίζα της ζητούμενης εξίσωσης είναι η x = 0.

Για $x \neq 0$ έχουμε

$$2020\sigma\upsilon\nu x - x = 2020 \Leftrightarrow$$
$$2020\sigma\upsilon\nu x - 2020 = x \Leftrightarrow$$
$$2020(\sigma\upsilon\nu x - 1) = x \Leftrightarrow$$
$$\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \frac{1}{2020} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2020}$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, άρα

$$f(\Delta) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}\right]$$

$\frac{1}{2020} \in f(\Delta)$, άρα υπάρχει μοναδικό $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $f(\xi) = \frac{1}{2020}$.

Κι επειδή $0 < \frac{1}{2020} \Leftrightarrow f(0) < f(\xi) \Leftrightarrow 0 > \xi$, αφού f γνησίως φθίνουσα.

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες την x = 0 και την x =ξ < 0.