ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Αξιολόγηση θεμάτων Πανελλαδικών

Το θέμα Α δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία .Οι μαθητές που είχαν προετοιμαστεί για να γράψουν τη θεωρία δεν θα αντιμετώπισαν πρόβλημα γιατί ήταν όλα ζητήματα μέσα από το σχολικό βιβλίο.
Το θέμα Β έχει διαφορετικό ύφος από προηγούμενες χρονιές, κάτι που ενδεχομένως αιφνιδίασε κάποιους υποψηφίους, ωστόσο ήταν διαχειρίσιμο. Τα ερωτήματα Β1, Β4 τα συναντάμε συνήθως στο θέμα Γ, παρόλα αυτά είναι στην εύκολη εκδοχή τους.
Το θέμα Γ κινείται εντός των προβλέψιμων πλαισίων καθώς για την επίλυσή του απαιτούνται συγκεκριμένες μεθοδολογίες.
Το θέμα Δ είναι πιο απαιτητικό από προηγούμενες χρονιές παρότι πραγματεύεται συνάρτηση μέσα από το σχολικό βιβλίο. Προϋποθέτει βαθιά κατανόηση και γνώση των μαθηματικών εννοιών. Είναι ένα θέμα που μπορεί να αναδείξει έναν άριστα προετοιμασμένο μαθητή με ιδιαίτερες μαθηματικές ικανότητες αλλά ταυτόχρονα να δυσκολέψει έναν καλά προετοιμασμένο μαθητή.

Γενικό σχόλιο
Τα θέματα είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας. Χρειάστηκε ουσιαστική κατανόηση της ύλης και κριτική σκέψη.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ.186

Α2. Σχολικό σελ.76

Α3. Σχολικό σελ.161

Α4. α) Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική,
με $f'(x)=3x^2+2\alpha x+9$. Ακόμη παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o=1$.
Άρα από θεώρημα Fermat ισχύει:

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow 3+2\alpha+9=0 \Leftrightarrow 2\alpha=-12 \Leftrightarrow \alpha=-6.$$

B.2 Έχουμε $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$, **με** $f'(x)=3x^2-12x+9$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η f είναι συνεχής στο $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(0,1]$,

τότε $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right]=(-3,1]$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-3$.

Η f συνεχής στο $\Delta_2=(1,3)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=(1,3)$,

τότε $f(\Delta_2)=(\lim\limits_{x\to 3^-} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x))=(-3,1)$,

αφού $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=-3$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1$.

Η f συνεχής στο $\Delta_3=[3,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3=[3,+\infty)$,

τότε $f(\Delta_3)=[f(3), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))=[-3,+\infty)$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-6x^2+9x-3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

Το $0\in f(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$, έχει ρίζα στο Δ_1, που είναι μοναδική αφού f γν. αύξουσα στο Δ_1.

Το $0\in f(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$, έχει ρίζα στο Δ_2 ,που είναι μοναδική αφού f γν. φθίνουσα στο Δ_2.

Το $0\in f(\Delta_3)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$, έχει ρίζα στο Δ_3, που είναι μοναδική αφού f γν. αύξουσα στο Δ_3.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες οι οποίες είναι και θετικές.

B.3 Έχουμε $f'(x)=3x^2-12x+9$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f''(x)=6x-12$.

Και $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-12=0 \Leftrightarrow 6x=12 \Leftrightarrow x=2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$			

Άρα η f κοίλη στο $(-\infty,2]$, αφού $f''(x)<0 \ \ \forall x\in(-\infty,2)$ και η f συνεχής στο $(-\infty,2]$ και η f κυρτή στο $[2,+\infty)$, αφού η f συνεχής στο $[2,+\infty)$ και $f''(x)>0 \ \ \forall x\in(2,+\infty)$. Ακόμη, παρουσιάζει σημείο καμπής για $x=2$, το $f(2)=-1$. Άρα σημείο καμπής είναι το Κ(2,-1).

Β.4

Η $g(x)=f(x)+x$, γράφεται $g(x)=x^3-6x^2+10x-3$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $g'(x)=3x^2-12x+10$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ είναι $\varepsilon_f: y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$

$\Leftrightarrow y=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0,y_f)$.

Άρα

$$y_f=-\xi f'(\xi)+f(\xi)\Leftrightarrow y_f=-3\xi^3+12\xi^2-9\xi+\xi^3-6\xi^2+9\xi-3$$

$$\Leftrightarrow y_f=-2\xi^3+6\xi^2-3.$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(\xi,g(\xi))$ είναι $\varepsilon_g: y-g(\xi)=g'(\xi)(x-\xi)$

$\Leftrightarrow y_g=g'(\xi)(x-\xi)+g(\xi)$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0,y_g)$.

Άρα

$$y_g=g'(\xi)(x-\xi)+g(\xi)\Leftrightarrow y_g=-3\xi^3+12\xi^2-10\xi+\xi^3-6\xi^2+10\xi-3$$

$$\Leftrightarrow y_g=-2\xi^3+6\xi^2-3.$$

Επομένως, οι εφαπτομένες των C_f και C_g τέμνονται στο ίδιο σημείο του άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(e^x \eta\mu x\right)=e^0\cdot\eta\mu 0=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+x} = 0$$
$$f(0) = 0$$
Επομένως η f είναι συνεχής στο 0 αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} \overset{x>0}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$
διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$ επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = +\infty$

Επομένως αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \notin \mathbb{R}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2.

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \le ημx \le 1 \Leftrightarrow \boxed{-e^x \le e^x ημx \le e^x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \left(-e^x\right) = 0 \end{array}\right\}$$ Άρα από το κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(e^x ημx\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} \overset{x>0}{=}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \boxed{1=\lambda}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)} = \boxed{\frac{1}{2}=\beta}$$

Άρα η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-\pi, 0)$

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{f(x) - x - \frac{1}{2} = 0}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, $x \in [-\pi, 0]$

- Η Κ είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $K(0) = f(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$

  $K(\pi) = f(\pi) + \pi - \frac{1}{2} = e^{-\pi}\eta\mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$

  Επομένως από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-\pi, 0)$.

Γ4. Για $t > 0$, $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$ επομένως

$$y'(t) = \left(\sqrt{x^2(t)+x(t)}\right)' = \frac{2x(t)x'(t)+x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = \frac{x'(t)\left(2x(t)+1\right)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}$$

Επομένως η εξίσωση γράφεται

$$y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow \frac{x'(t)\left(2x(t)+1\right)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = x'(t) \overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow} \frac{\left(2x(t)+1\right)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(t)+1 = 2\sqrt{x^2(t)+x(t)} \Leftrightarrow 4x^2(t)+4x(t)+1 = 4\left(x^2(t)+x(t)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(t)+4x(t)+1 = 4x^2(t)+4x(t) \Leftrightarrow 1 = 0 \qquad (\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta)$$

Δηλαδή δεν υπάρχει $t_0 > 0$ ώστε να είναι ίσοι οι ρυθμοί μεταβολής.
Για $t = 0$ η $y(t) = f(x(t))$ δεν είναι παραγωγίσιμη (αφού η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$.

ΘΕΜΑ Δ

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) άρα είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Η F είναι παράγουσα της f στο (0,+∞), οπότε $F'(x)$=f(x) για κάθε x∈ $(0,+\infty)$.

Ισχύει xf(x)=2F(x)lnx, x>0 <=> xf(x)-2F(x)lnx=0, x>0. (1)

Δ1. Η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως α.π.π.σ.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\left(\frac{F(x)}{x^{\ln x}}\right)' = \frac{F'(x)x^{\ln x}-F(x)\left(x^{\ln x}\right)'}{\left(x^{\ln x}\right)^2} = \frac{f(x)x^{\ln x}-F(x)\left(x^{\ln x}\frac{2\ln x}{x}\right)}{\left(x^{\ln x}\right)^2}$$

$$=\frac{x^{\ln\ }\left[\frac{xf(x)}{x}-\frac{2\ln xF(x)}{x}\right]}{\left(x^{\ln x}\right)^2} = \frac{xf(x)-2\ln x\,F(x)}{x\left(x^{\ln x}\right)^2} = 0\,\left(\alpha\pi\acute{o}\ (1)\right),$$

αφού $\left(x^{\ln\ }\right)' = \left(e^{\ln x^{\ln\ }}\right)' = \left(e^{\ln x\cdot\ln x}\right)' = \left(e^{(\ln\ )^2}\right)' = \frac{e^{(\ln\ )^2}\cdot 2\ln x}{x}$.

Άρα, η g είναι σταθερή.

Δ2. (i) Έστω $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}=l$.

Έχουμε ότι $\mathrm{x}\cdot\mathrm{f}(\mathrm{x})=2\cdot\mathrm{F}(\mathrm{x})\cdot\mathrm{lnx}$, για κάθε x>0.

Για x=1: f(1)=2F(1)ln1 => f(1)=0.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M(1,f(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): y=2x, συνεπώς $f'(1)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$.

Επειδή η f είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$.

Επιπλέον, $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)=\ln 1=0$, άρα το l είναι απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Έτσι, $l=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x-1}}{\dfrac{\ln x}{x-1}}=\dfrac{2}{1}=2$,

όπου $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1}=1$.

(ii) Από το (Δ1) γνωρίζουμε ότι υπάρχει σταθερά c∈ ℝ τέτοια, ώστε:

$g'(x)=c$ για κάθε x∈ $(0,+\infty)$.

Άρα, $\frac{F(x)}{x^{\ln x}}=c \iff F(x)=c\cdot x^{\ln x}$, $x>0$. (2)

Εξάλλου, από την ισότητα $xf(x)=2F(x)\cdot\ln x$, $x>0$, κοντά στο 1 είναι

$\ln x\neq 0$ και ισχύει:

$F(x)=\frac{xf(x)}{2\ln x}$, συνεπώς $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{f(x)}{\ln x}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$ (λόγω του Δ2(i))

και επειδή η F είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, $F(1)=\lim_{x\to 1} F(x)=1$.

Η (2) για x=1: $F(1)=c\cdot 1^{\ln}$ => c=1,

συνεπώς $F(x)=x^{\ln}$, για κάθε $x>0$.

Δ3. Η F είναι παραγωγίσιμη με:

$F'(x)=\left(x^{\ln x}\right)'=x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}=2\cdot x^{\ln x-1}\cdot\ln x$, για κάθε $x>0$,

όπου $x^{\ln x-1}>0$ για κάθε $x>0$.

Άρα, $F'(x)=0$ <=> lnx=0 <=> x=1

$F'(x)>0$ <=> lnx>0 <=> x>1

$F'(x)<0$ <=> lnx<0 <=>0< x<1.

x	0	1	$+\infty$
F’	-	0	+
F	↘		↗

Η $F'(x)<0$ στο $(0,1)$ και η F είναι συνεχής στο $(0,1]$, άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Η $F'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ και η F είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Για την επίλυση της εξίσωσης:

$F(x^2)=F(x)-(x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2)-F(x)=-(x-1)^2$. (3)

Για x=1, η εξίσωση επαληθεύεται, αφού $F(1)-F(1)=0$.

Για x>1, λόγω μονοτονίας $\Rightarrow x^2>x \Rightarrow F(x^2)>F(x) \Rightarrow F(x^2)-F(x)>0$,

ενώ $x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow (x-1)^2>0 \Rightarrow -(x-1)^2<0$, άρα η (3) είναι αδύνατη στο $(1,+\infty)$.

Όμοια, για $0<x<1$, λόγω μονοτονίας $\Rightarrow 0<x^2<x<1 \Rightarrow F(x^2)>F(x) \Rightarrow$ $F(x^2)-F(x)>0$,

ενώ $0<x<1 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow (x-1)^2>0 \Rightarrow -(x-1)^2<0$, άρα η (3) είναι αδύνατη στο $(0,1)$.

Επομένως, η x=1 είναι η μοναδική ρίζα της (3).

Δ4. Από το Δ3, η F είναι γν.αύξουσα στο [1,e] οπότε, για $x \geq 1 \Rightarrow$ $F(x) \geq F(1) \Rightarrow F(x) \geq 1 \Rightarrow F(x) > 0$.

Άρα, $E(\Omega)=\int_1^e |F(x)|dx = \int_1^e F(x)dx = \int_1^e x^{\ln}\ \ dx = \int_1^e e^{(\ln\ \ )^2 dx}$.

Ισχύει $e^x \geq x+1$ και θέτουμε όπου x το $(\ln x)^2$.

Άρα, $e^{(\ln x)^2} \geq (\ln x)^2+1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\ln x = 0 \Leftrightarrow$ $x=1$.

Επομένως,

$E(\Omega)=\int_1^e e^{(\ln x)^2}\,dx > \int_1^e (\ln^2 x\ +1)dx = \int_1^e \ln^2 x\ dx + \int_1^e 1\ dx = (e-2) +$ $(e-1) = 2e-3$

διότι:

$$\int_1^e \ln^2 x \ dx \ = \int_1^e (x)' \ln^2 x \ dx = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \frac{2 \ln x}{x} dx$$

$$= e \ln^2 e - 1 \cdot \ln^2 1 - \int_1^e 2 \ln x \ dx =$$

$= e - \int_1^e (2x)' \ln x \ dx = e - [2x \ln x]_1^e + \int_1^e 2x \frac{1}{x} dx = e - (2e \ln e - 2 \cdot 1 \cdot \ln 1) +$
$\int_1^e 2dx = e - 2e + 2(e - 1) = e - 2$.

Άρα, Ε(Ω)>2e-3.