

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 9

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 105

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του \mathbb{R} , τότε για $x \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή $(x)' = 1$.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 77

Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

A4.

α. Σωστό

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_f = (0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

Ισχύει

$$D_h = D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x > 2\} = (2, +\infty)$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(x - 2) - 1$$

B2. Έχουμε $h(x) > 1 \Leftrightarrow 2 \ln(x - 2) - 1 > 1 \Leftrightarrow 2 \ln(x - 2) > 2 \Leftrightarrow \ln(x - 2) > 1 \Leftrightarrow x - 2 > e \Leftrightarrow x > e + 2$

B3. Έστω $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $h(x_1) = h(x_2)$. Τότε

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow$$

$$2 \ln(x_1 - 2) - 1 = 2 \ln(x_2 - 2) - 1 \Rightarrow$$

$$2 \ln(x_1 - 2) = 2 \ln(x_2 - 2) \Rightarrow$$

$$\ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2) \Rightarrow \text{[γιατί } \ln x \text{ 1-1 στο } (0, +\infty) \text{]}$$

$$x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2$$

Άρα h 1-1

Επομένως αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \in (2, +\infty)$ έχουμε

$$h(x) = y \Leftrightarrow$$

$$2 \ln(x - 2) - 1 = y \Leftrightarrow$$

$$2 \ln(x - 2) = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x - 2) = \frac{y + 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x - 2 = e^{\frac{y+1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$x = e^{\frac{y+1}{2}} + 2, \quad x > 2 \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} + 2 > 2 \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} > 0 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$$

Επομένως, $h^{-1}(y) = e^{\frac{y+1}{2}} + 2$

Δηλαδή, $h^{-1}(x) = e^{\frac{x+1}{2}} + 2, x \in \mathbb{R}$

B4. $\varphi(x) = (h^{-1}(x) - 3)(x^3 - 8) = \left(e^{\frac{x+1}{2}} - 1\right)(x^3 - 8)$

- Η φ είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- $\varphi(-1) = \varphi(2)$ γιατί

$$\varphi(-1) = 0 \text{ και } \varphi(2) = 0$$

Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Rolle για την φ στο $[-1, 2]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = \frac{x}{e^x}, D_f = [0,3]$

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}, x \in [0,3]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow 1 < x \leq 3$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,3]$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = \frac{1}{e}$, τοπικό (ολικό) ελάχιστο στο 0 το $f(0) = 0$ και τοπικό ελάχιστο στο 3 το $f(3) = \frac{3}{e^3}$.

Γ2.

$$f''(x) = \frac{(1-x)'e^x - (1-x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-1-1+x}{e^x} = \frac{x-2}{e^x}, x \in [0,3]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

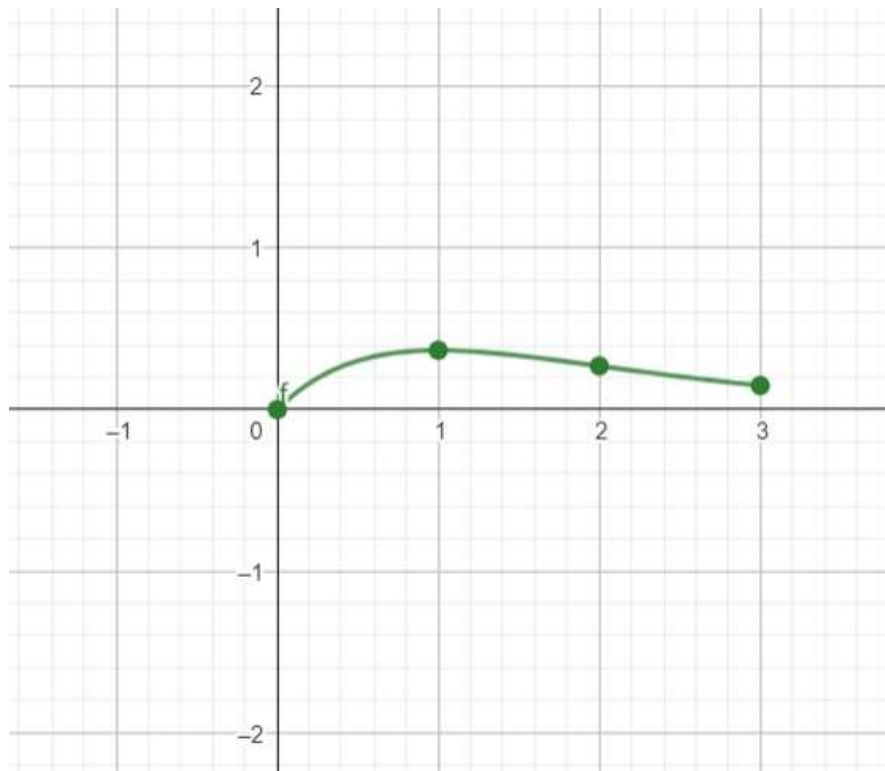
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow 2 < x \leq 3$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 2$$

Επομένως, η f είναι κοίλη στο $[0, 2]$ και κυρτή στο $[2, 3]$.

Έχει σημείο καμπής το $A(2, f(2))$ ή $A\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

Γ3.



Γ4.

$$E(\Omega) = \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 \frac{x}{e^x} dx \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 (-x)(e^{-x})' dx \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = [-x \cdot e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-x)' \cdot (e^{-x}) dx \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = [-x \cdot e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-1) \cdot (e^{-x}) dx \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = [-x \cdot e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (e^{-x})' dx \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = [-x \cdot e^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = -e^{-1} + 0 - e^{-1} + e^0 \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = 1 - 2e^{-1} \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = 1 - \frac{2}{e} \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{e-2}{e} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη

Είναι:

f συνεχής στο $x_0 = -1$, άρα $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (e^{x+1} + \lambda x) = 1 - \lambda$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{ax + \alpha}{x + \alpha} = \frac{-a + \alpha}{a - 1} = 0$
- $f(-1) = \frac{-\alpha + \alpha}{\alpha - 1} = 0$

Επομένως $1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Δ2.

Για $\lambda = 1$ είναι $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + x, & x < -1 \\ \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}, & x \geq -1 \end{cases}$

f παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$, άρα $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^{x+1} + x}{x + 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DL'H}} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^{x+1} + 1}{1} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\alpha x + \alpha}{(x + 1) \cdot (x + \alpha)} =$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\alpha(x + 1)}{(x + 1) \cdot (x + \alpha)} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\alpha}{x + \alpha} = \frac{a}{-1 + a}$

Επομένως, $\frac{\alpha}{-1 + \alpha} = 2 \Leftrightarrow \alpha = -2 + 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 2$

$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2$

Εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(-1,0)$:

$$\varepsilon: y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Rightarrow$$

$$\varepsilon: y - 0 = 2(x + 1) \Rightarrow$$

$$\varepsilon: y = 2x + 2$$

Δ3.

$$\text{Για } \lambda = 1 \text{ και } \alpha = 2 \text{ είναι } f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + x, & x < -1 \\ \frac{2x+2}{x+2}, & x \geq -1 \end{cases}$$

- Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
- Στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{x+2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{DL'H}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

Άρα $y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

- Στο $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{DL'H}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + 1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x+1} + x - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} = 0$$

Άρα $y = x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Δ4.

$$\text{Είναι } -1 \leq \eta_{\mu x} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq \eta_{\mu x} - 2 \leq -1$$

$$\text{Για } x < -1$$

$$f'(x) = e^{x+1} + 1$$

$$f''(x) = e^{x+1} > 0 \Rightarrow f \text{ κυρτή στο } (-\infty, -1)$$

Επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής.

$$\text{Άρα } f(u) \geq 2u + 2$$

$$\text{Για } u = \eta\mu x - 2$$

$$f(\eta\mu x - 2) \geq 2(\eta\mu x - 2) + 2 \Rightarrow f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2$$