ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 22 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΔΕΚΑ (10)
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. γ

Α2. δ

Α3. γ

Α4. β

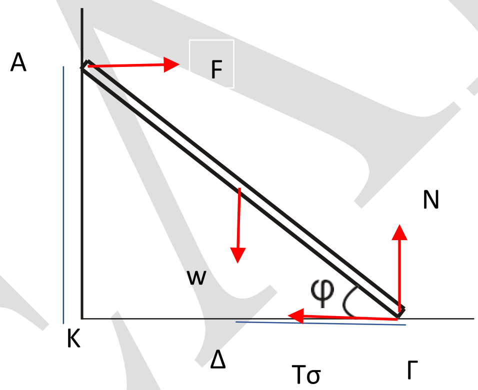
Α5. **α.** Σ, **β.** Λ, **γ.** Σ, **δ.** Σ, **ε.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

α. Σωστό το (ii)

β.



Η σκάλα ισορροπεί οπότε : $\begin{cases} \Sigma\tau = 0 \\ \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$

$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \rightarrow \tau_F + \tau_w = 0 \leftrightarrow$

$$F \cdot (AK) = W \cdot (\Gamma\Delta) \leftrightarrow F \cdot L \cdot \eta\mu\varphi = W \cdot \frac{L}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow F = \frac{w}{2 \cdot \varepsilon\varphi\varphi} \ (1)$$

η $\Sigma F_x = 0 \leftrightarrow T_\sigma = F$ (2) και η $\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = W$ (3)

Η σκάλα δεν ολισθαίνει όταν

$$T_\sigma \leq T_{\sigma\,\max} \quad \Longrightarrow T_\sigma \leq \mu \cdot N \ (4)$$

Από τις σχέσεις (2) και (1) προκύπτει ότι :

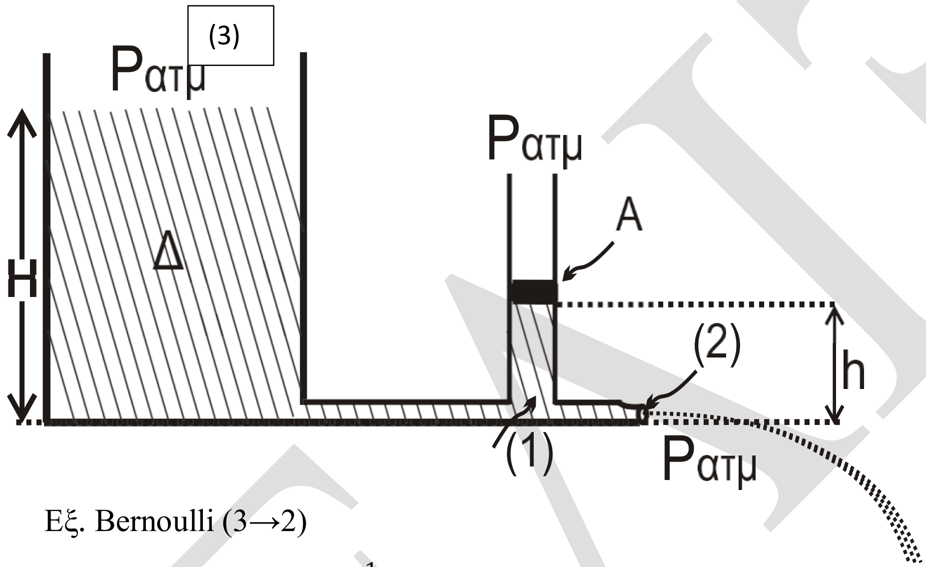
$$T_\sigma = F \implies T_\sigma = \frac{W}{2 \cdot \varepsilon\varphi\varphi} \; (5)$$

Από τις σχέσεις (4) και (5)

$$\frac{W}{2 \cdot \varepsilon\varphi\varphi} \leq \mu \cdot W \implies \boxed{\varepsilon\varphi\varphi \geq \frac{1}{2\mu}}$$

Β2.

α. Σωστό το (i)



Εξ. Bernoulli (3→2)

$P_{atm} + pgH = P_{atm} + \frac{1}{2}pu_2^2 \rightarrow u_2^2 = 2gH \; (1)$

Εξ. Bernoulli (1→2)

$$P_{atm} + \frac{W}{A} + pgh + \frac{1}{2}pu_1^2 = P_{atm} + \frac{1}{2}pu_2^2 \leftrightarrow \frac{W}{A} = \frac{1}{2}p\,(u_2^2 - u_1^2) - pgh \; (2)$$

Από την εξίσωση συνέχειας

$$\Pi_1 = \Pi_2 \leftrightarrow Au_1 = \frac{A}{2}u_2 \leftrightarrow u_1 = \frac{u_2}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} u_1 = \frac{\sqrt{2gH}}{2} \; (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\frac{W}{A} = \frac{1}{2}p\left(2gH - \frac{2gH}{4}\right) - pgh \underset{h=\frac{H}{4}}{\Longleftrightarrow} \frac{W}{A} = \frac{1}{2}pgH \Leftrightarrow \boxed{W = \frac{pgHA}{2}}$$

Β3.

α. Σωστό το (iii)

β. Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ορμής για τον κάθε άξονα ξεχωριστά στην πρώτη κρούση.

$$m_1 \upsilon_1 = m_2 \upsilon'_{2x} \Longrightarrow m\upsilon_1 = 2m\upsilon'_2 \sigma\upsilon\nu 30^o \Longrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{3}\upsilon'_2 \quad (1)$$

και

$$0 = m_1 \upsilon'_1 - m_2 \upsilon'_{2y} \Longrightarrow m\upsilon'_1 = 2m\upsilon'_2 \eta\mu 30^o \Longrightarrow \upsilon'_1 = \upsilon'_2 \quad (2)$$

Εφαρμόζου Αρχή Διατήρησης Ορμής για τη δεύτερη κρούση (πλαστική).

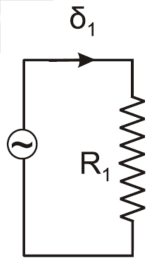
$$m_1 \upsilon'_1 = (m_1 + m_3)V \Longrightarrow m\upsilon'_1 = 2mV \Longrightarrow V = \frac{\upsilon'_1}{2} \xRightarrow{(1),(2)} V = \frac{\upsilon_1}{2\sqrt{3}}$$

Άρα, ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{K_{\sigma\upsilon\sigma}}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_3)V^2}{\frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2} = \frac{2 \cdot \frac{\upsilon_1^2}{4 \cdot 3}}{\upsilon_1^2} = \frac{1}{6}$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Αρχικά, έχουμε ένα απλό κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος:



Η μέση ισχύς στον αντιστάτη R_1 δίνεται από τη σχέση:

$$P_1 = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{R_1} \rightarrow V_{\varepsilon\nu}^2 = 12 \cdot 6 \rightarrow V_{\varepsilon\nu} = 6\sqrt{2}V$$

Το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης είναι ίσο με:

$$V = V_{\varepsilon\nu} \cdot \sqrt{2} \rightarrow V = 12V$$

Η ενεργός ένταση του εναλλασσόμενου ρεύματος στον αντιστάτη R_1 θα υπολογιστεί από τη σχέση:

$$I_{\varepsilon\nu}=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{R_1}\rightarrow I_{\varepsilon\nu}=\frac{6\sqrt{2}}{6}\rightarrow I_{\varepsilon\nu}=\sqrt{2}\,A$$

Γ2. Παραμένοντας στο ίδιο κύκλωμα, ο διπλασιασμός της συχνότητας επιφέρει το διπλασιασμό της γωνιακής συχνότητας. Δηλαδή: $\omega'=2\omega=100\pi\ rad/s$.

Οπότε: $\begin{cases}V=N\cdot\omega\cdot B\cdot A\\ V'=N\cdot\omega'\cdot B\cdot A\end{cases}\rightarrow V'=V\cdot\frac{\omega'}{\omega}\rightarrow V'=2V\rightarrow V'=24V$, το νέο πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης.

Για τη στιγμιαία ισχύ στον αντιστάτη R_1 ισχύει:

$$p_1=\upsilon_1'\cdot i_1'=V'\cdot I'\cdot\eta\mu^2(\omega'\cdot t)=\frac{V'^2}{R_1}\cdot\eta\mu^2(\omega'\cdot t)\rightarrow$$

$$\rightarrow p_1=\frac{24^2}{6}\cdot\eta\mu^2(100\pi\cdot t)\rightarrow p_1=96\cdot\eta\mu^2(100\pi\cdot t)\ (1)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή $t=5\cdot10^{-3}s$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$p_1=96\cdot\eta\mu^2\left(100\pi\cdot\frac{5}{1000}\right)=96\cdot\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow p_1=96W.$$

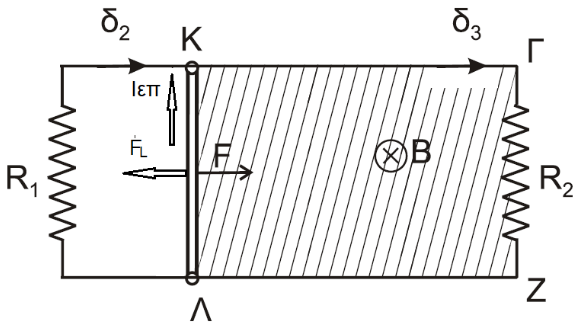
Γ3. Αρχικά με ανοιχτούς τους διακόπτες δ_2 και δ_3 η ράβδος θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα υπό την επίδραση της δύναμης F.
Έχουμε:

$$F=m\cdot\alpha\rightarrow\alpha=\frac{F}{m}=1m/s^2$$

Συνεπώς για τα πρώτα δύο δευτερόλεπτά της κίνησής του έχουμε:

$$\begin{cases}\upsilon_0=\alpha\cdot t\\ x_0=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2\end{cases}\xrightarrow{t=2s}\begin{cases}\upsilon_0=2m/s\\ x_0=2m\end{cases}$$

Στη συνέχεια κλείνοντας ταυτόχρονα τους δύο διακόπτες, αφού ο αγωγός κινείται με σταθερή ταχύτητα, αντιλαμβανόμαστε ότι ισορροπεί υπό την επίδραση της F και της δύναμης Laplace.
Με βάση την κατεύθυνση της δύναμης Laplace προσδιορίζουμε και τη φορά του επαγωγικού ρεύματος στο σχήμα:



Λόγω φαινομένου ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, στον αγωγό ΚΛ εμφανίζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή ίση με

$$E = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = B\upsilon_2 \ell$$

Και το ηλεκτρικό ρεύμα που θα διαρρέει συνολικά το κύκλωμα (άρα και τον αγωγό ΚΛ) θα ισούται με

$$I_{o\lambda} = \frac{E}{R_{o\lambda}}$$

Όπου

$$R_{o\lambda} = R_{1,2} + R_{K\Lambda} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_{K\Lambda} = \frac{6 \cdot 3}{6+3} + 2 = 4\Omega$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του αγωγού, προκύπτει ότι

$$F_L = F \Longrightarrow BI_{o\lambda}\ell = F \Longrightarrow \frac{B^2 \upsilon_2 \ell^2}{R_{o\lambda}} = F \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow B^2 = \frac{FR_{o\lambda}}{\upsilon_2 \ell^2} \Longrightarrow B = \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 4}{2 \cdot 1^2}} \Longrightarrow \boxed{B = 1T}$$

Γ4. Η δύναμη F έδρασε (και παρήγαγε έργο) σε όλο το χρονικό διάστημα 0 έως $5s$, ενώ ο αντιστάτης αντίστασης R_2 διαρρεόταν από ηλεκτρικό ρεύμα (και είχαμε μετατροπή ηλεκτρικής ενέργειας σε θερμική σε αυτόν) για το χρονικό διάστημα $2s$ έως $5s$, δηλαδή για χρονικό διάστημα $\Delta t = 5 - 2 = 3s$.

Το παραγόμενο έργο από τη σταθερή δύναμη F στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι ίσο με

$$W_F = F \cdot \Delta x_{o\lambda}$$

Όπου $\Delta x_{o\lambda} = x_0 + \Delta x_1 = x_0 + \upsilon_0 \Delta t = 2 + 2 \cdot 3 = 8m$. Επομένως, το αντίστοιχο παραγόμενο έργο από την F ισούται με

$$W_F = 0{,}5 \cdot 8 = 4J$$

Επίσης, ισχύει ότι (πολική τάση)

$$V_{K\Lambda} = V_{\Gamma\Delta} = V_2 = E - I_{o\lambda}R_{K\Lambda} = B\upsilon_2\ell - \frac{E}{R_{o\lambda}} \cdot R_{K\Lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = B\upsilon_2\ell - \frac{B\upsilon_2\ell}{R_{o\lambda}} \cdot R_{K\Lambda} = 2 - \frac{2}{4} \cdot 2 \Rightarrow V_2 = 1V$$

Άρα, η θερμότητα που αναπτύσσεται στον αντιστάτη R_2 θα είναι ίση με (ο αντιστάτης διαρρέεται από σταθερό ρεύμα)

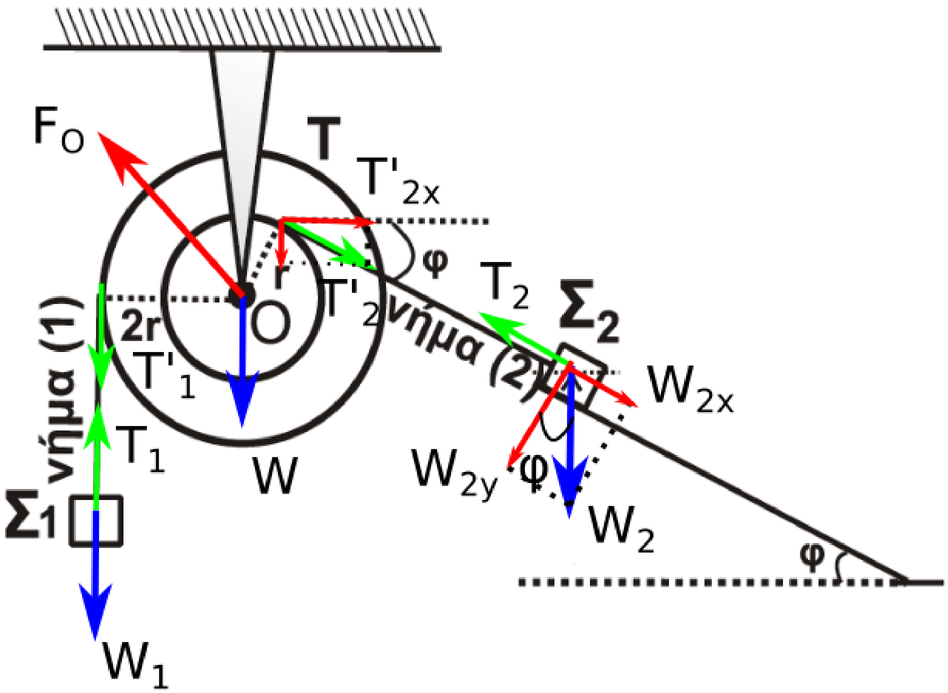
$$Q_2 = \frac{V_2^2}{R_2}\Delta t = \frac{1^2}{3} \cdot 3 = 1J$$

Επομένως, το ζητούμενο ποσοστό θα είναι

$$\pi = \frac{Q_2}{W_F} \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot 100\% \Rightarrow \boxed{\pi = 25\%}$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία και στα σώματα Σ_1 και Σ_2 φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, αντιλαμβανόμαστε ότι (κατά μέτρο)

$$T_2 = W_{2x} = m_2 g\eta\mu\varphi = 5 \cdot 10 \cdot 0{,}6 = 30N$$

Επειδή το σώμα Σ_1 ισορροπεί, ισχύει ότι

$$T_1 = W_1 = m_1 g$$

Τέλος, επειδή τα νήματα είναι αβαρή και μη εκτατά, για τα μέτρα των αντίστοιχων τάσεων των νημάτων έχουμε ότι $T_1 = T_1'$ και $T_2 = T_2'$.

Από την ισορροπία της τροχαλίας, προκύπτει ότι

$$\Sigma\tau_O = 0 \Longrightarrow T_2 r = T_1 2r \Longrightarrow T_1 = 15N$$

Άρα, η ζητούμενη μάζα του σώματος Σ_1 ισούται με

$$\boxed{m_1 = \frac{T_1}{g} = \frac{15}{10} = 1{,}5kg}$$

Για το μέτρο της δύναμης από τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας, έχουμε ότι

$$F_{Ox} = T_{2x} = T_2 \sigma\upsilon\nu\varphi = 24N$$

Και

$$F_{Oy} = T_1 + T_{2y} + Mg = 15 + 18 + 15 = 48N$$

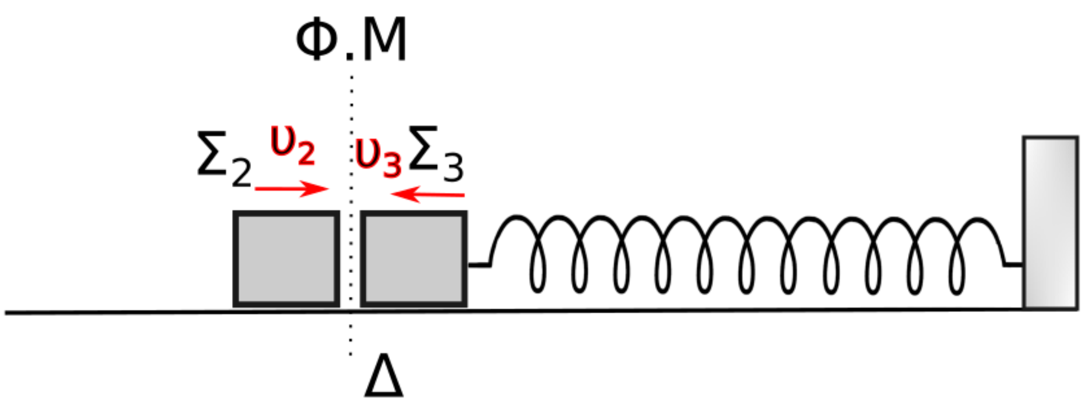
Επομένως, το μέτρο της αντίστοιχης δύναμης είναι ίσο με:

$$\boxed{F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2} = \sqrt{24^2 + 48^2} = 24\sqrt{5}N}$$

Δ2. Με εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα Σ_2 από τη στιγμή που κόβονται τα νήματα έως και τη στιγμή που αυτό φθάνει στη βάση του λείου κεκλιμένου επιπέδου, υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητάς τους στη βάση του επιπέδου, το οποίο θα είναι ίδιο και με το μέτρο της ταχύτητας του Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση του με το Σ_3. Συγκεκριμένα

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{W_2} \Longrightarrow \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 = m_2 g h \Longrightarrow \upsilon_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{36} = 6m/s$$

Θεωρώντας ότι η κρούση των σωμάτων συμβαίνει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου όταν το Σ_3 φθάνει για πρώτη φορά, έχουμε (το Σ_2 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση διανύοντας απόσταση ℓ)



$$\upsilon_2 = \frac{\ell}{\Delta t}$$

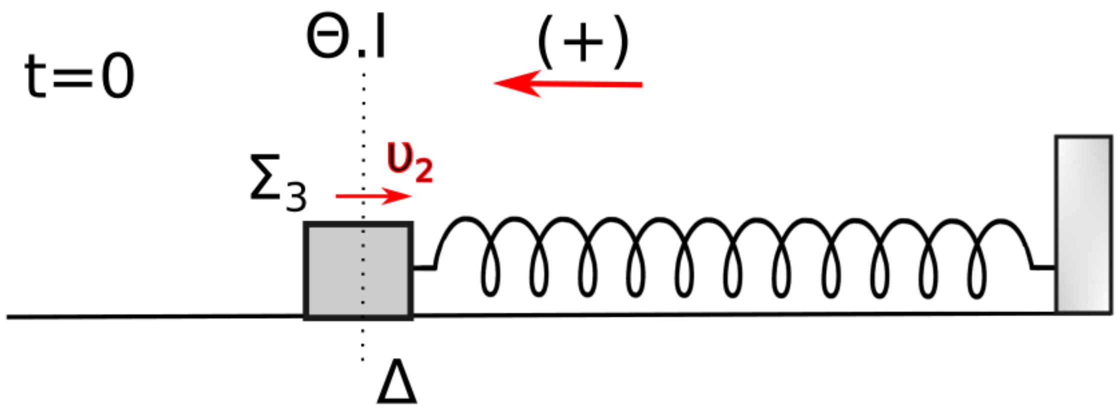
Με $\Delta t = \frac{T}{4}$, όπου T η περίοδος ταλάντωσης του Σ_3 μετά το κόψιμο του νήματος (3) καθώς το Σ_3 θεωρήσαμε ότι μεταβαίνει απευθείας από ακραία θέση σε θέση ισορροπίας. Οπότε

$$\upsilon_2 = \frac{\ell}{\frac{T}{4}} \Longrightarrow T = \frac{4\ell}{\upsilon_2} = \frac{4 \cdot \frac{3\pi}{5}}{6} = \frac{2\pi}{5} s$$

Έτσι, η σταθερά k του ελατηρίου προκύπτει ίση με

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_3}{k}} \Longrightarrow \frac{5}{k} = \frac{1}{25} \Longrightarrow \boxed{k = 125\ N/m}$$

Δ3. Επειδή η κρούση των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 είναι κεντρική και ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες, αντιλαμβανόμαστε ότι τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Επομένως, για την ταλάντωση που θα εκτελέσει το Σ_3 μετά την κρούση έχουμε:



Η εξίσωση θα είναι της μορφής

$$x(t) = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

όπου

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5\, rad/s$$

Και

$$x(0) = 0 \Longrightarrow \eta\mu\varphi_0 = 0 \Longrightarrow \varphi_0 = \pi\, rad$$

καθώς η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_3 είναι αρνητική αμέσως μετά την κρούση.

Για το πλάτος A της ταλάντωσης του Σ_3 έχουμε:

$$\upsilon_{max} = \upsilon_2 \Longrightarrow \omega A = \upsilon_2 \Longrightarrow A = \frac{\upsilon_2}{\omega} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A = \frac{6}{5} = 1{,}2m$$

Επομένως, η ζητούμενη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι η

$$\boxed{x(t) = 1{,}2\eta\mu(5t + \pi)\quad (S.I.)}$$

Δ4. Επειδή η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_3 είναι οκταπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης, η απομάκρυνση του σώματος προκύπτει ίση με:

$$K + U = E_{\tau\alpha\lambda} \Rightarrow 8U + U = U_{max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{9}U_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{A}{3}$$

Και επειδή θέλουμε το γεγονός να συμβεί για πρώτη φορά, θα είναι $x = -0{,}4m$.

Επιπλέον η ταχύτητα τότε του σώματος Σ_3 θα ισούται με:

$$K = \frac{8}{9}K_{max} \Rightarrow \upsilon = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\upsilon_2 = \pm 4\sqrt{2}\,m/s$$

Και επειδή θέλουμε το γεγονός να συμβεί για πρώτη φορά, θα είναι $\upsilon = -4\sqrt{2}\,m/s$.

Έτσι, ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος ισούται με

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = F_{\varepsilon\pi} = -kx \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -125\cdot(-0{,}4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dt} = 50\,kg\cdot\frac{m}{s^2} \text{ ή } N}$$

Τέλος, από το Θ.Μ.Κ.Ε. για το ζητούμενο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας προκύπτει ότι

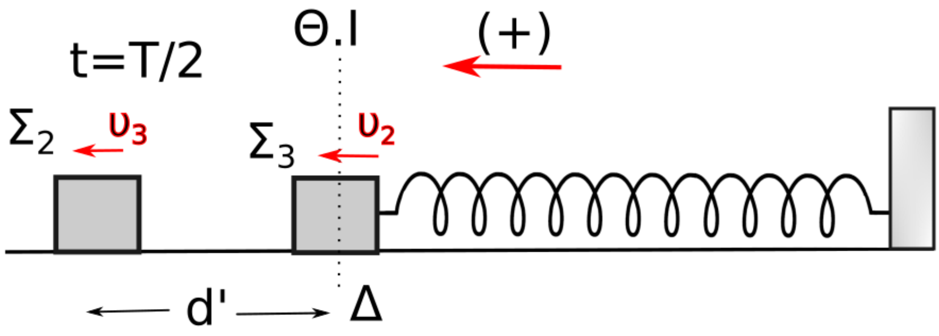
$$\left|\frac{dK}{dt}\right| = \left|\frac{dW_{\Sigma F}}{dt}\right| = \left|\frac{\Sigma F\,dx}{dt}\right| = |\Sigma F\cdot\upsilon| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dK}{dt}\right| = |kx\cdot\upsilon| = 50\cdot 4\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\left|\frac{dK}{dt}\right| = 200\sqrt{2}\,J/s}$$

Δ5. Το σώμα Σ_3 θα περάσει ξανά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου μετά την κρούση τη χρονική στιγμή

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{5}s$$

Η ζητούμενη απόσταση των σωμάτων θα ισούται με το διάστημα που θα έχει διανύσει προς τα αριστερά ο Σ_2 μετά την κρούση στον παραπάνω χρόνο.



Συγκεκριμένα, η ταχύτητα του Σ₂ μετά την κρούση θα είναι ίση με την αντίστοιχη ταχύτητα του Σ₃ πριν από αυτή. Η τιμή της ταχύτητας του Σ₃ πριν από την κρούση είναι ίση με την αντίστοιχη μέγιστη ταχύτητα της αρχικής (πριν από την κρούση) ταλάντωσής του, η οποία έχει πλάτος ίσο με $A_1 = d = 0{,}2m$. Επομένως

$$\upsilon_3 = \omega d = 5 \cdot 0{,}2 = 1m/s$$

Και

$$\boxed{d' = \upsilon_3 \frac{T}{2} = 2 \cdot 0{,}314 = 0{,}628m}$$