ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α 1. Βλέπε σχολικό

Α 2. Βλέπε σχολικό

Α 3. Βλέπε σχολικό

Α 4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β 1. Το πεδίο ορισμού της ζητούμενης συνάρτησης είναι

$$\mathrm{A} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\} = \{x \in \subseteq \text{ και } x^2 + 1 \geq 2\} = \{x \in \subseteq \text{ και } x^2 \geq 1\}$$

$$= \{x \in \subseteq \text{ και } x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Επίσης ,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) - 2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$ για κάθε $x \in A$.

Β 2. Είναι

- $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x-2}\right) = -\infty$ (1) , διότι

$\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3} > 0$ και $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

- $\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x-2} = +\infty$ (2) , διότι

$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3} > 0$ και $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι το $\lim_{x \to 2} h(x)$ δεν υπάρχει.

Β 3. Η συνάρτηση $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ με

$$(g \circ f)'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)' = \frac{(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} .$$

οπότε , θα είναι $(g \circ f)'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g \circ f$ στο σημείο με τετμημένη $x_1 = \sqrt{2}$ είναι

$$y - (g \circ f)(\sqrt{2}) = (g \circ f)'(\sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2})$$

ή $y - 1 = \sqrt{2} \cdot (x - \sqrt{2})$

ή $y = \sqrt{2} \cdot x - 1$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ 1. Από την υπόθεση ισχύει ότι

$$f(x) \cdot f'(x) = \tfrac{1}{2} \vartheta \quad 2f(x) \cdot f'(x) = 1 \vartheta \quad \left(f^2(x)\right)' = (x)' \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Επιπλέον οι συναρτήσεις $f^2(x)$ και x είναι συνεχείς , επομένως υπάρχει σταθερά $c \in \subseteq$ τέτοια , ώστε

$$f^2(x) = x + c \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Για x=1 στην παραπάνω σχέση έχουμε : $f^2(1) = 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα

$$f^2(x) = x \text{ για κάθε } x \in [0,+\infty). \qquad (1)$$

Έχουμε ,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, οπότε θα είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε x>0.

Επίσης η συνάρτηση f είναι συνεχής και ως εκ τούτου διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(0,+\infty)$. Όμως είναι $f(1) = 1 > 0$, οπότε θα ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Από την (1) λοιπόν προκύπτει ότι :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ για κάθε } x \in [0,+\infty).$$

Γ 2. Έστω $\mathrm{M}(x, f(x)), x \geq 0$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Τότε η απόσταση του σημείου Μ από το σημείο Α θα είναι

$$(\mathrm{AM}) = \sqrt{\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + \tfrac{9}{4}}, \; x \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + \tfrac{9}{4}} \; , \; x \in [0,+\infty).$$

Η d(x) είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$d'(x) = \frac{\left(x^2 - 2x + \frac{9}{4}\right)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}} = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}}.$$

Έχουμε :

- $d'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

- $d'(x) > 0 \vartheta \quad \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}} > 0 \vartheta \quad x-1 > 0 \vartheta \quad x > 1$,

  διότι $\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}} > 0$ για κάθε x>0.
- $d'(x) < 0 \vartheta \quad x < 1$.

Οι ρίζες και το πρόσημο της $d'(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		1		$+\infty$
$d'(x)$	|	-	0	+	
$d(x)$		↘	|	↗	

Η $d(x)$ είναι συνεχής , άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1] και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Στο $x = 1$ παρουσιάζει ελάχιστο. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το Μ(1,1).

Γ 3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Μ είναι

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} ,$$

ενώ της ευθείας ΑΜ είναι

$$\lambda_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{1-0}{1-\frac{3}{2}} = -2 .$$

Είναι λοιπόν $f'(1) \cdot \lambda_{AM} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$, άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Μ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΜ.

Γ 4. Ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1,2]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1) \text{ τ.μ.}$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ 1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ⊆ με

$$f'(x) = \frac{3x^2(3x^2-3x+1)-(6x-3)x^3}{(3x^2-3x+1)^2} = \frac{x^2\left(9x^2-9x+3-6x^2+3x\right)}{\left(3x^2-3x+1\right)^2}$$

$$= \frac{x^2\left(3x^2-6x+3\right)}{\left(3x^2-3x+1\right)^2} = \frac{3x^2(x-1)^2}{\left(3x^2-3x+1\right)^2} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in ⊆.$$

Επιπλέον η συνάρτηση f είναι συνεχής , άρα είναι γνησίως αύξουσα στο ⊆ .

Δ 2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ⊆ , άρα η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.Επίσης

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{3x^2-3x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x^3-3x^2+3x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\tfrac{1}{3}x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-3x+1}-\frac{x}{3}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x}{9x^2-9x+3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{9x^2} = \frac{1}{3}$$

Επομένως , η ευθεία με εξίσωση

$$y = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}$$

είναι ασύμπτωτη (πλάγια) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$.
Ομοίως , αποδεικνύεται ότι η παραπάνω ευθεία είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$.

Δ 3. Έχουμε ,

$$f(x)+f(1-x) = \frac{x^3}{3x^2-3x+1} + \frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2-3(1-x)+1}$$

$$= \frac{x^3}{3x^2-3x+1} + \frac{1-3x+3x^2-x^3}{3-6x+3x^2-3+3x+1}$$

$$= \frac{x^3}{3x^2-3x+1} + \frac{1-3x+3x^2-x^3}{3x^2-3x+1}$$

$$= \frac{3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1} = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \subseteq .$$

Δ 4. Είναι ,

$$f(x) = 0 \ \vartheta \ \ x = 0 \,,$$

άρα το χωρίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και x=1.

Επίσης , ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\mathrm{E} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1 - f(1-x))\, dx = \int_0^1 1dx - \int_0^1 f(1-x)dx = 1 - \int_0^1 f(1-x)dx.$$

Όσον αφορά το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(1-x)dx$, θέτουμε $1 - x = u$, άρα $dx = - du$.

Επιπλέον για $x = 0$ είναι $u = 1$ και για $x = 1$ είναι $u = 0$. Επομένως , η παραπάνω ισότητα , γράφεται :

$$E = 1 - \int_1^0 f(u)(-du) = 1 + \int_0^1 f(u)(-du) = 1 - \int_0^1 f(u)du = 1 - E \,,$$

δηλαδή ,

$$\mathrm{E} = 1 - \mathrm{E} \ \vartheta \ \ 2\mathrm{E} = 1 \ \vartheta \ \ \mathrm{E} = \tfrac{1}{2} \ \text{τ.μ.}$$