

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1.

- α)** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 15
- β) i. , ii.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ.35

A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 142

A3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 135

A4.

- α)** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σχόλιο σελ. 134
- β)** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 71

A5. Σωστή απάντηση το γ)

ΘΕΜΑ Β

B1. Η ευθεία $\psi = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, άρα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{e} \right)^x + \lambda \right) = 2 \Leftrightarrow 0 + \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

B2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x = e^{-x} - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι συνάρτηση 1-1. Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο \mathbb{R} .

Η g είναι συνεχής στο $[2, 3]$, αφού είναι συνεχής στο \mathbb{R}

$$\text{Ισχύει } g(2) = e^{-2} - 2 + 2 = e^{-2} > 0 \text{ και } g(3) = e^{-3} - 3 + 2 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$$

Άρα είναι $g(2)g(3) < 0$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$

Τελικά η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο \mathbb{R} που ανήκει στο διάστημα $(2, 3)$

B3. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $f'(x) = -e^{-x} < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι συνάρτηση 1-1, άρα αντιστρέφεται.

$$\text{Είναι } f(x) = \psi \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = \psi$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = \psi - 2, \quad \psi - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{-x} = \ln(\psi - 2), \quad \psi > 2$$

$$\Leftrightarrow -x = \ln(\psi - 2), \quad \psi > 2$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = -\ln(\psi - 2), \quad \psi > 2$$

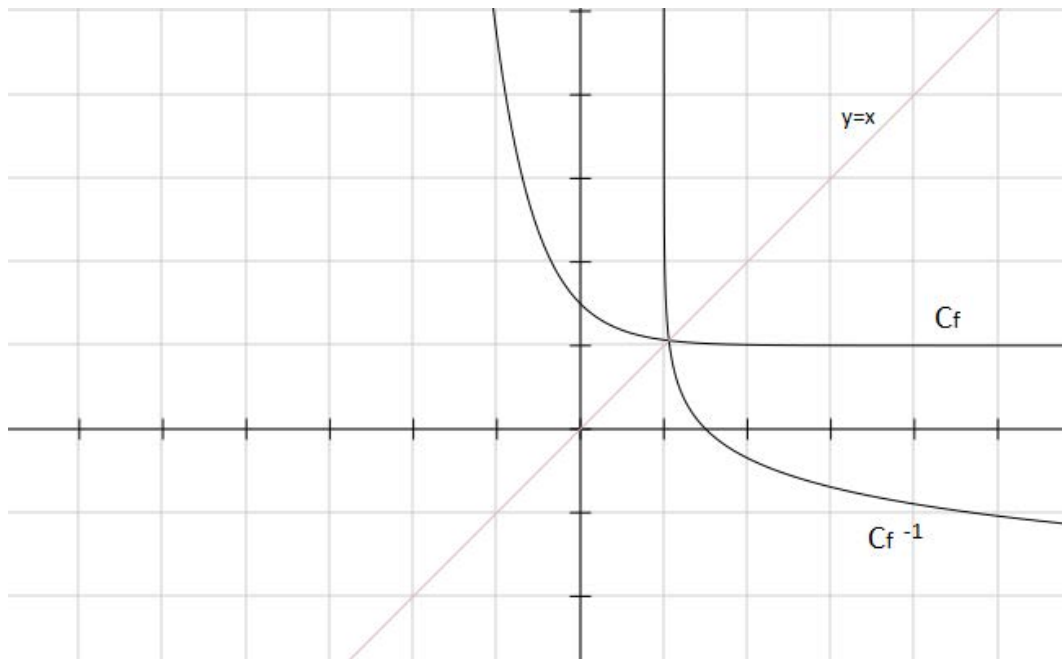
$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), \quad x > 2$$

$$\text{B4. Είναι } \lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-(\ln(x - 2))) =$$

$$\left(\text{Θέτουμε } u = x - 2, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 2^+} u = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln u) = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f^{-1}



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη. Άρα είναι συνεχής και στο 1, οπότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = 1 + \alpha \Leftrightarrow 1 + \alpha = 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - 1 - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \alpha}{x - 1} \stackrel{\alpha = \beta}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} + \alpha x - 1 - \alpha}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(e^{x-1} + \alpha x - 1 - \alpha)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} + \alpha}{1} = e^0 + \alpha = 1 + \alpha$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$\Leftrightarrow 1 + \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και επειδή $\alpha = \beta$ ισχύει και $\beta = 1$

Γ2. Για $\alpha = \beta = 1$ είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$

Στο διάστημα $(-\infty, 1)$ η f έχει τύπο $f(x) = e^{x-1} + x$, οπότε είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^{x-1} + 1$

Στο διάστημα $(1, +\infty)$ η f έχει τύπο $f(x) = x^2 + 1$, οπότε είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x$

Ισχύει $f'(1) = 2$, σύμφωνα με το Γ1

Άρα είναι $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + 1, & x < 1 \end{cases}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το \mathbb{R} .

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , οπότε

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Πράγματι ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{e} + x \right) = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e} = \frac{0}{e} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Γ3. i. Επειδή $0 \in f(\mathbb{R})$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση $x_0 \in \mathbb{R}$ η οποία είναι μοναδική, αφού $f \uparrow \mathbb{R}$.

Όμως για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) > 0$. Πράγματι για κάθε $x \in [0, 1)$ είναι $f(x) = e^{x-1} + x > 0$ και για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) = x^2 + 1 > 0$

Οπότε η ρίζα x_0 είναι αρνητική

ii. Είναι $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(f(x) - x_0) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ ή $f(x) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x_0$

- Η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$, αφού από το **Γ3 i**.

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση το x_0 που δεν ανήκει στο $(x_0, +\infty)$

- Η εξίσωση $f(x) = x_0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$, αφού για $x > x_0$

ισχύει: $x > x_0 \stackrel{f \uparrow R}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$, ενώ $x_0 < 0$

Οπότε η εξίσωση $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

Γ4. Οι συντεταγμένες $x(t)$ και $\psi(t)$ του σημείου Μ είναι συναρτήσεις του χρόνου t . Το Μ κινείται στη C_f με $x \geq 1$, άρα ισχύει $\psi(t) = x^2(t) + 1$

Την χρονική στιγμή t_0 ισχύει $x(t_0) = 3$, $\psi(t_0) = 10$ και $x'(t_0) = 2 \mu / \text{sec}$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΟΚ δίνεται από τον τύπο

$$E(t) = \frac{\text{ΟΚ} \cdot \text{ΚΜ}}{2} = \frac{x(t)\psi(t)}{2} = \frac{x(t) \cdot (x^2(t) + 1)}{2} = \frac{x^3(t) + x(t)}{2}$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι $E'(t) = \frac{3x^2(t)x'(t) + x'(t)}{2}$

Ισχύει $E'(t_0) = \frac{3x^2(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2} = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 2}{2} = 28$

Οπότε την χρονική στιγμή t_0 το εμβαδό $E(t)$ αυξάνεται με ρυθμό $28 \tau. \mu / \text{sec}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $D_f = R$. Η f είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων και συνθέσεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $f'(x) = (x-1)' \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1)(\ln(x^2 - 2x + 2))' + \alpha$

$$= \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \frac{(x^2 - 2x + 2)'}{x^2 - 2x + 2} + \alpha = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$$

Η ευθεία $\varepsilon: \psi = -x + 2$ εφάπτεται της C_f στο $A(1,1)$, άρα ισχύει

$$\begin{cases} f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1 \\ f'(1) = -1 \Leftrightarrow \ln 1 + 0 + \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Δ2. Για $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ είναι $f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$

Οι συναρτήσεις f και $\psi = -x + 2$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[1, 2]$ και

ισχύει $f(x) - (-x + 2) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$

Πράγματι για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι: $x - 1 \geq 0$ και $\ln(x^2 - 2x + 2) =$

$$= \ln(x^2 - 2x + 1 + 1) = \ln((x-1)^2 + 1) \geq \ln 1 = 0$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^2 (f(x) - (-x + 2)) \cdot dx = \int_1^2 (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln(x^2 - 2x + 2) \cdot 2(x-1) \cdot dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{θέτουμε } u = x^2 - 2x + 2, \text{ οπότε } du = 2(x-1)dx \\ \text{είναι } u_1 = 1 - 2 + 2 = 1, \quad u_2 = 4 - 4 + 2 = 2 \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u \cdot du = \frac{1}{2} \int_1^2 (u)' \ln u \cdot du = \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \cdot \frac{1}{u} \cdot du$$

$$= \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 0) - \frac{1}{2} \int_1^2 du = \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot (2 - 1) = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \tau.μ$$

Δ3. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln((x-1)^2 + 1) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \ln((x-1)^2 + 1) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0 \quad \text{και}$$

$$\frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} = \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

ii. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq \underbrace{(\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - 2 + \frac{3}{2}}_{f(\lambda)}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}, \text{ που ισχύει}$$

Πράγματι:

Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$, αφού

είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda} = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

Όμως ισχύει:

$$f'(\xi) \geq -1, \text{ λόγω του } \Delta 3. \text{ i.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

\Delta 4. $D_g = \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

Ισχύει $g'(x) = -3x^2 - 1 \leq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Πράγματι είναι

$$g'(x) = -1 \Leftrightarrow -3x^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) \geq -1$, λόγω του **\Delta 3. i.**

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$. Πράγματι είναι

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \ln\left((x-1)^2 + 1\right) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left((x-1)^2 + 1\right) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln((x-1)^2 + 1) = 0 \\ \text{και} \\ \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} = 0 \end{cases}, \text{ αφού } \ln((x-1)^2 + 1) \geq 0 \text{ και } \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln((x-1)^2 + 1) = \ln 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 1 \\ \text{και} \\ 2(x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{και} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Οι C_f , C_g για να έχουν κοινή εφαπτομένη στα σημεία $A(\gamma, f(\gamma))$ και $B(\delta, g(\delta))$ πρέπει $f'(\gamma) = g'(\delta)$ (1)

Όμως ισχύει $g'(\delta) \leq -1 \leq f'(\gamma)$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει $\begin{cases} f'(\gamma) = -1 \\ g'(\delta) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \delta = 0 \end{cases}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι

$$\varepsilon: \psi - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow \psi - 1 = -1 \cdot (x-1) \Leftrightarrow \psi = -x + 2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(0, g(0))$ είναι

$$\varepsilon': \psi - g(0) = g'(0)(x-0) \Leftrightarrow \psi - 2 = -1 \cdot x \Leftrightarrow \psi = -x + 2$$

Άρα οι C_f , C_g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη την $\psi = -x + 2$