ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΠΛΗΡΕΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 145 iii)

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 15

Α3. f – Τ και g – Η

Α4. α) Ψ

β) 2ο παράδειγμα σελ. 62 σχολικού βιβλίου

Α5. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\lim_{x\to 1^-}\big(f(x)\big) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+\alpha) = 1+\alpha$$

$$\lim_{x\to 1^+}\big(f(x)\big) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2$$

Η f είναι συνεχής, άρα $1+\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Β2. Για α=1 είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x>1 \\ x^2+1, & x\le 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)} = -1$$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$, άρα και στο $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, επομένως δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

B3. Για $x < 1$ είναι $f'(x) = 2x$

$$f'(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8}$$

$f\left(-\frac{1}{8}\right)=\left(-\frac{1}{8}\right)^2 + 1 = \frac{1}{64} + 1 = \frac{65}{64}$

Το σημείο είναι $A\left(-\frac{1}{8}, \frac{65}{64}\right)$ και η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι:

$\varepsilon_1: y - f\left(-\frac{1}{8}\right)=f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y - \frac{65}{64} = -\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{63}{64}$

Για $x > 1$ είναι $f'(x)=\frac{x-x-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$

$f'(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ με $x > 1$, άρα $x = 2$

$$f(2) = \frac{3}{2}$$

Το σημείο είναι $B\left(2, \frac{3}{2}\right)$ και η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι:

$\varepsilon_2: y - f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + 2$

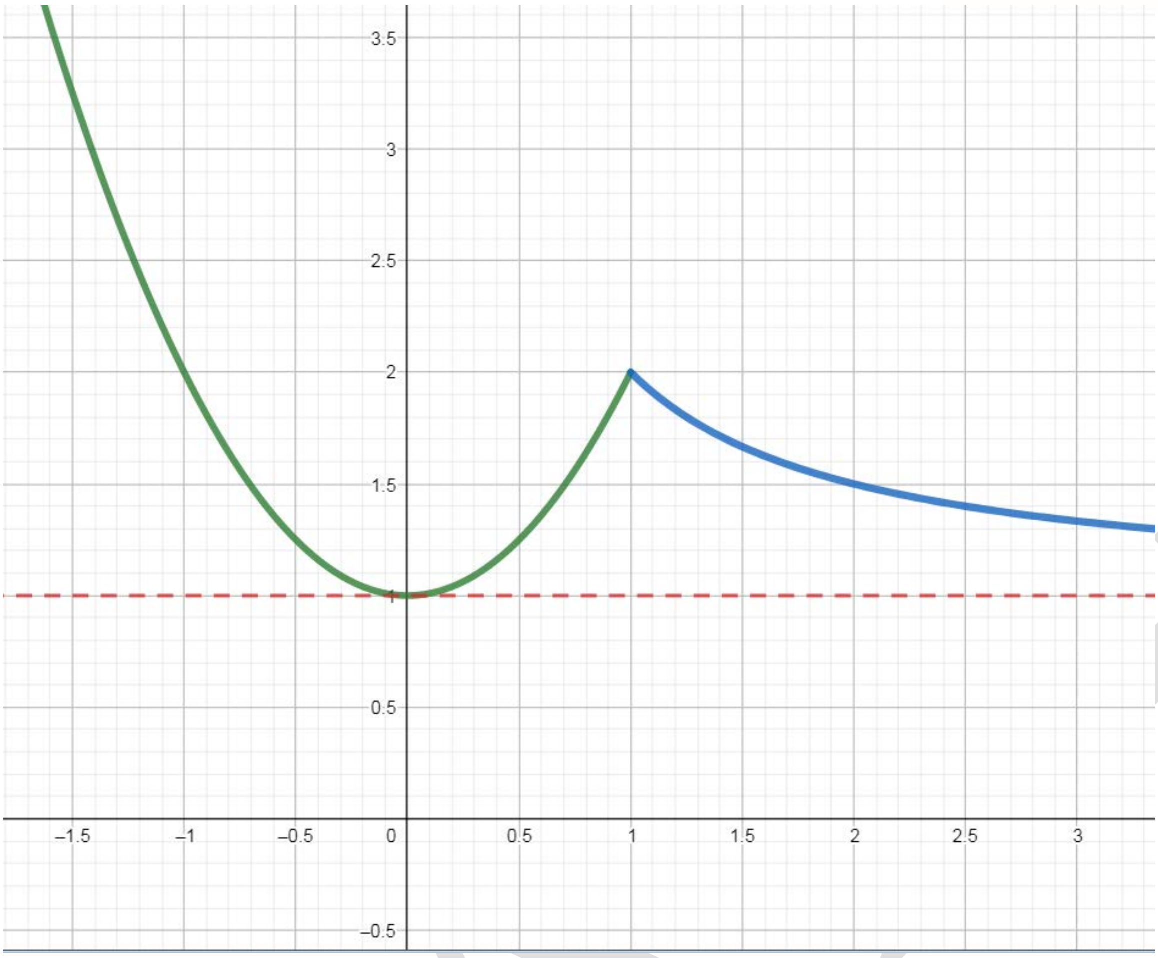
B4.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

Άρα η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Στο $-\infty$ δεν έχει ασύμπτωτες ως πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες



ΘΕΜΑ Γ

Γ1:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}>0$ αφού $x>1$, $e^x>0$, $x^2>0$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 δηλαδή αντιστρέψιμη.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f .

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=(1,+\infty)$ άρα

$f(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(e,+\infty)$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^x}{x}=e$

Γ2.

Η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)}{x-1}+\dfrac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}-\dfrac{\eta\mu\alpha-2}{x}=0$ γράφεται

$$x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)-(x-1)(x-2)(\eta\mu\alpha-2)=0$$
με $x\neq 1$ και $x\neq 2$ και $x\neq 0$

θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)-(x-1)(x-2)(\eta\mu\alpha-2) \text{ στο } [0,2]$$
η οποία είναι

- συνεχής στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$ ως πολυωνυμική (με βαθμό το πολύ 2)
- $g(0)=-2(\eta\mu\alpha-2)>0$ αφού $\eta\mu\alpha-2<0$
- $g(1)=-f(\alpha)<0$ αφού $f(\alpha)>e$ λόγω του συνόλου τιμών της f
- $g(2)=2f^{-1}(\alpha)>0$ αφού $f^{-1}(\alpha)\in D_f=(1,+\infty)$
- δηλαδή $g(0)g(1)<0$ και $g(1)g(2)<0$

οπότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει 2 τουλάχιστον λύσεις. Μία στο $(0,1)$ και μία στο $(1,2)$

Η συνάρτηση $g(x)$ είναι πολυώνυμο το πολύ $2^{ου}$ βαθμού άρα έχει το πολύ 2 ρίζες.

Οι λύσεις, επομένως, της $g(x)=0$ που είναι ισοδύναμη με την $\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}-\frac{\eta\mu\alpha-2}{x}=0$ για $x\neq 1$ και $x\neq 2$ και $x\neq 0$ είναι ακριβώς 2.

Γ3.

Για κάθε $x>1$ ισχύει

$$f(x)+1>e+\ln f(x)\Leftrightarrow \frac{e^x}{x}+1>e+\ln\left(\frac{e^x}{x}\right)\Leftrightarrow \frac{e^x}{x}+1>e+\ln e^x-\ln x\Leftrightarrow \boxed{\frac{e^x}{x}+1-e-x+\ln x>0}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=\frac{e^x}{x}+1-e-x+\ln x$ με $x\geq 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[1,+\infty)$ με

$$K'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x}-1+\frac{1}{x}=\frac{e^x(x-1)}{x}-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{e^x(x-1)-x+1}{x}=$$
$$=\frac{e^x(x-1)-(x-1)}{x}=\frac{(e^x-1)(x-1)}{x}>0 \quad \text{για κάθε } x>1$$

οπότε η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και για κάθε $x>1$ θα ισχύει

$$K(x)>K(1)=0\Leftrightarrow \boxed{\frac{e^x}{x}+1-e-x+\ln x>0}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$

Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ με μοναδική ρίζα την $x=\frac{\pi}{3}$.

Δηλαδή ισχύει $f'(x)\neq 0$ και συνεχής στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3},0\right]$ επομένως διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα αυτά.

- Για να βρω το πρόσημο της f' στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ υπολογίζω το $f'(0)=2\sigma\upsilon\nu 0-1=1>0$ επομένως $f'(x)>0$ στο $[0,\pi)$
- Για να βρω το πρόσημο της f' στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$ υπολογίζω το

  $f'(\pi)=2\sigma\upsilon\nu\pi-1=-2-1<0$ επομένως $f'(x)>0$ στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$

και η μονοτονία της f δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

x	0	$\pi \qquad \frac{\pi}{3}$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

- Η f έχει ολικό μέγιστο για $x=\frac{\pi}{3}$ την τιμή $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cdots=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$
- Η f έχει τοπικό ελάχιστο για $x=0$ και $x=\pi$ τις τιμές $f(0)=0$ και $f(\pi)=-\pi$ αντίστοιχα . Προφανώς για $x=\pi$ η f έχει ολικό ελάχιστο

Δ2.

Ισχύει $f''(x)=-2\cdot\eta\mu x<0$ στο $(0,\pi)$ δηλαδή η $f(x)$ είναι κοίλη στο $[0,\pi]$ οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή η C_f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0,f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(x_0,f(x_0))$

Δ3.

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\text{συν}x\,dx = \int_0^{\pi}(2\text{ημ}x\,\text{συν}x - x\,\text{συν}x)\,dx = \int_0^{\pi}(\text{ημ}2x - x\,\text{συν}x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi}\text{ημ}2x\,dx - \int_0^{\pi}x\,\text{συν}x\,dx = [-\text{συν}2x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(\text{ημ}x)'\,x\,dx = \cancel{[-\text{συν}2\pi + \text{συν}0]} - \left([\text{ημ}x\cdot x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\text{ημ}x\,dx\right) =$$

$$= -\left(\cancel{[\text{ημ}\pi\cdot\pi - \text{ημ}0\cdot 0]} - \int_0^{\pi}\text{ημ}x\,dx\right) = \int_0^{\pi}\text{ημ}x\,dx = [-\text{συν}x]_0^{\pi} = -\text{συν}\pi + \text{συν}0 = 1+1 = 2$$

Δ4.

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\text{ημ}x - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{\text{ημ}x}{x} - 1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$

β)

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(f(x) - f(2x)\right)\cdot\ln x\right] = \lim_{x\to 0}\left[(2\text{ημ}x - x - 2\text{ημ}2x + 2x)\cdot\ln x\right] = \lim_{x\to 0}\left[(2\text{ημ}x - 2\cdot\text{ημ}x\cdot\text{συν}x + x)\cdot\ln x\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(2\text{ημ}x - 2\cdot\text{ημ}x\cdot\text{συν}x + x)}{x}\cdot x\cdot\ln x\right] = \lim_{x\to 0}\left(2\frac{\text{ημ}x}{x} - 2\frac{\text{ημ}x}{x}\text{συν}x + 1\right)\cdot x\cdot\ln x =$$

$$= (2\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1 + 1)\cdot 0 = 0$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$