ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ:

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΠΛΗΡΕΙΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 253.
Α2. α. Ψ β. $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 191.
Α4. α. Λάθος β. Σωστό γ. Λάθος δ. Σωστό ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ πρέπει $x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$. Άρα $x\in D_g$ που σημαίνει $x\in R-\{1\}$. Επίσης $g(x)\in D_f \Rightarrow \dfrac{x}{1-x}>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0$ με $x\neq 1$.

Λύνοντας $x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$. Κάνουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
x	-	+	+
$1-x$	+	+	-
$x(1-x)$	-	+	-

Δηλαδή, $x\in(0,1)$. Κάνοντας την συναλήθευση έχουμε τελικά $D_{f\circ g}=(0,1)$.

Ο τύπος της συνάρτησης είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\dfrac{x}{1-x}$, με $x\in(0,1)$.

Β2. Η συνάρτηση $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα $h'(x)=\dfrac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1-x}{x}\cdot\dfrac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{x(1-x)}$, με $x\in(0,1)$, δηλαδή $x(1-x)>0$ επομένως $h'(x)>0\Rightarrow h(x)$ γνησίως αύξουσα που σημαίνει ότι είναι και ΄΄1-1΄΄ δηλαδή αντιστρέφεται. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της.

Θέτοντας $\dfrac{x}{1-x}=y$ βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1-x}=0$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{1-x}=+\infty$, άρα και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\ln y=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\ln y=+\infty$. Τελικά,

$h\left((0,1)\right) \underset{h \text{ συνεχής}}{\overset{h \text{ αύξουσα}}{=}} \left(\lim\limits_{x\to 0^+} h(x), \lim\limits_{x\to 1^-} h(x)\right) = (-\infty, +\infty)$. Επομένως $D_{h^{-1}} = R$. Στη συνέχεια θέτουμε $h(x) = y$ και λύνουμε ως προς x:

$\ln\dfrac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = (1-x)e^y \Leftrightarrow x\left(1+e^y\right) = e^y \Leftrightarrow x = \dfrac{e^y}{e^y+1}$, άρα $h^{-1}(y) = \dfrac{e^y}{e^y+1}, y \in R$ ή $h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}, x \in R.$

B3. Η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο R, άρα

$\varphi'(x) = \dfrac{e^x\left(e^x+1\right) - e^x e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} > 0$ για $x \in R$, που σημαίνει ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα. Επίσης, η συνάρτηση φ' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο R, άρα

$\varphi''(x) = \dfrac{e^x\left(e^x+1\right)^2 - e^x 2\left(e^x+1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^4} = \dfrac{e^x\left(e^x+1\right) - e^x 2e^x}{\left(e^x+1\right)^3} = \dfrac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$, για $x \in R.$

$\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Αφού $e^x > 0$ και $\left(e^x+1\right)^3 > 0$ συνεπώς,

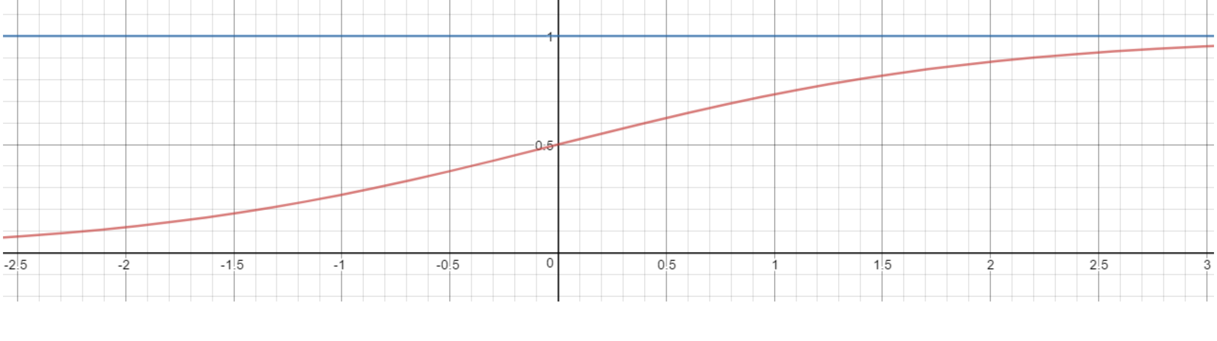
x	$-\infty$ $\quad$ 0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	+	-
$\varphi(x)$	κυρτή	κοίλη

Η φ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$ άρα έχουμε σημείο καμπής το $\left(0, \varphi(0)\right)$, δηλαδή $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

B4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)} = 1$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της Cf που φέρουμε την εφαπτομένη τότε

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ε: $y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 (x - x_0)$

$$\boxed{y = -\sigma\upsilon\nu x_0 \cdot x + x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 - \eta\mu x_0}$$

Διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε

$$-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 + x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 - \eta\mu x_0$$

$$0 = -\frac{\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 + x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 - \eta\mu x_0 + \frac{\pi}{2}$$

$$\eta\mu x_0 - \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot \left(x_0 - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Προφανείς ρίζες το 0 και το π

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x - \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu x \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad x \in [0, \pi]$

Έστω ότι η h έχει τρεις ρίζες 0,ρ,π με $0 < \rho < \pi$

- Η h συνεχής στο $[0, \rho]$ και $[\rho, \pi]$
- Η h παρ/σιμη στο $(0, \rho)$ και (ρ, π) με $h'(x) = \eta\mu x \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
- $h(0) = h(\rho) = h(\pi) = 0$

Οπότε από το θ. Rolle

Υπάρχει $\xi_1 \in (0, \rho)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi_1 \cdot \left(\xi_1 - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ άρα $\xi_1 = \frac{\pi}{2}$

αφού $\eta\mu\xi_1 > 0$

Και

Υπάρχει $\xi_2 \in (\rho, \pi)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi_2 \cdot \left(\xi_2 - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ άρα $\xi_2 = \frac{\pi}{2}$

αφού $\eta\mu\xi_2 > 0$

Δηλαδή $\xi_1 = \xi_2$ άτοπο αφού $\xi_1 \in (0, \rho)$ και $\xi_2 \in (\rho, \pi)$

Τα ζητούμενα σημεία επαφής είναι τα $O(0, f(0))$ και $B(\pi, f(\pi))$

Άρα οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι

$\varepsilon_1 : y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0)$

$\boxed{\varepsilon_1 : y = x}$

$\varepsilon_2 : y - f(\pi) = f'(\pi)\cdot(x-\pi)$

$\boxed{\varepsilon_2 : y = x - \pi}$

Γ2.

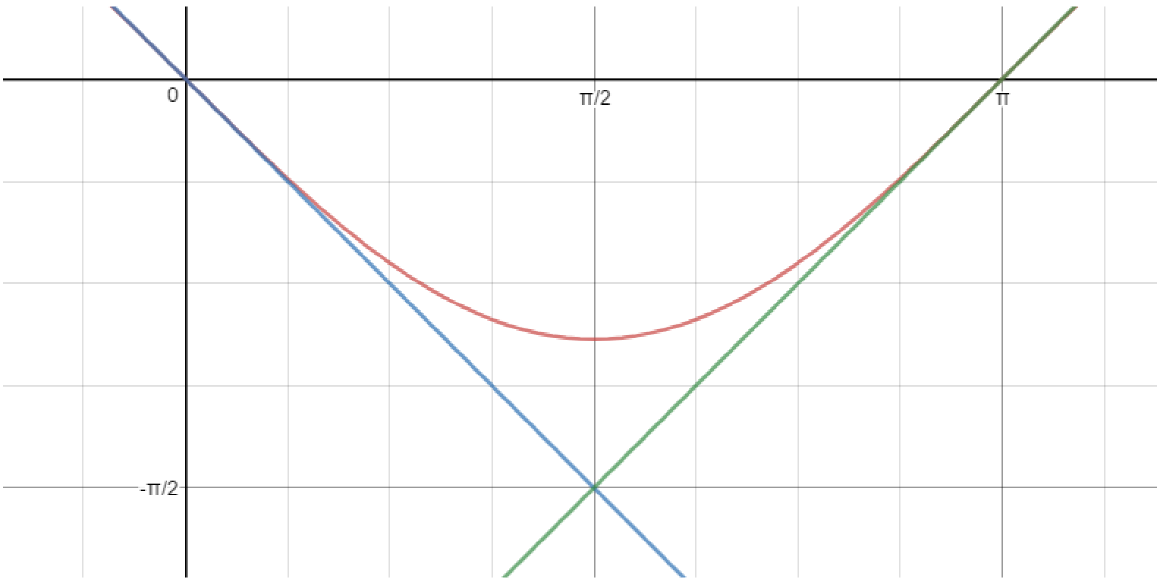
$f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$

$f''(x) = \eta\mu x > 0 \;\text{ στο }\; (0,\pi)$

Άρα η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ και η C_f βρίσκεται πάνω από τις εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

Κοινά σημεία $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: Λύνω το σύστημα $\begin{cases} y = -x \\ y = x - \pi \end{cases}$

$-x = x - \pi \Leftrightarrow 2x = \pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ οπότε $y = -\frac{\pi}{2}$ Α$\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$



Εμβαδόν τριγώνου (ΟΑΒ)=$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\pi=\frac{\pi^2}{4}$

$$\mathrm{E}_2=-\int_0^{\pi}-\eta\mu x\,dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x\,dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0=2$$

αφού $-\eta\mu x\le 0$, για κάθε $\mathrm{x}\in[0,\pi]$

$$\mathrm{E}_1=(\mathrm{OAB})-\mathrm{E}_2=\frac{\pi^2}{4}-2$$

$$\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$$

Γ3.

$$\lim_{x\to\pi}\left(-\eta\mu x+x\right)=\pi>0$$
$$\lim_{x\to\pi}\left(-\eta\mu x-x+\pi\right)=0$$

Η f είναι κυρτή άρα είναι πάνω από την εφαπτομένη ε_2 με εξαίρεση το σημείο επαφής Β άρα ισχύει $f(x)\ge x-\pi \Leftrightarrow \boxed{-\eta\mu x-x+\pi\ge 0}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=π άρα $f(x)-x+\pi>0, x\in(0,\pi)$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty$$

Οπότε $\lim_{x\to\pi}\frac{-\eta\mu x+x}{-\eta\mu x-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\left[\left(-\eta\mu x+x\right)\cdot\frac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}\right]\overset{\pi\cdot(+\infty)}{=}+\infty$

Γ4.

Για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει $f(x)\ge x-\pi$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\pi$ σύμφωνα με το Γ3

Οπότε για κάθε $x\in[1,e]\subseteq[0,\pi]$ ισχύει

$$f(x)\ge x-\pi$$
$$\frac{f(x)}{x}\ge 1-\frac{\pi}{x}$$
$$\frac{f(x)}{x}-1+\frac{\pi}{x}\ge 0 \quad (1)$$ η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\pi$

Έστω $h(x)=\frac{f(x)}{x}-1+\frac{\pi}{x},\ \ x\in[1,e]$

Η h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και για κάθε $x \in [1, e]$ ισχύει

$h(x) = \frac{f(x)}{x} - 1 + \frac{\pi}{x} \geq 0$ λόγω της (1)

Και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \pi$

Άρα ισχύει

$$\int_1^e h(x)\,dx > 0$$

$$\int_1^e \left(\frac{f(x)}{x} - 1 + \frac{\pi}{x} \right) dx > 0$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^e \left(-1 + \frac{\pi}{x} \right) dx > 0$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x} \right) dx$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \left[x - \pi \ln x \right]_1^e = (e - \pi \ln e) - (1 - \pi \ln 1)$$

$$\boxed{\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \pi - 1}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x\in[-1,0)$ η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Για $x\in(0,\pi]$ η συνάρτηση $f(x)=e^x\eta\mu x$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Θα ελέγξουμε για $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x\eta\mu x=0,$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$ και $f(0)=0.$ Αφού, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0),$ η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0 και τελικά η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[-1,\pi].$ Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του $[-1,\pi]$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται και στα οποία η f' μηδενίζεται. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$ με $f(x)=\sqrt[3]{(-x)^4}=(-x)^{\frac{4}{3}}$ και άρα $f'(x)=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}(-x)'=-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}.$ Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi]$ με $f(x)=e^x\eta\mu x$ και άρα $f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x.$ Για $x=0,$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^+}e^x\frac{\eta\mu x}{x}=1,\text{ αφού }\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{(-x)^4}}{-\sqrt[3]{(-x)^3}}=\lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt[3]{-x}\right)=0,$$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Για $x\in[-1,0)$ $f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}=0\Leftrightarrow x=0$ απορρίπτεται αφού $x\in[-1,0).$ Για $x\in(0,\pi]$ $f'(x)=0\Leftrightarrow e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0.$ Για $x=\pi$ δεν είναι λύση της εξίσωσης άρα για $x\neq\pi$ το $\eta\mu x\neq 0$ στο $(0,\pi).$ Συνεπώς η εξίσωση γίνεται $1+\sigma\varphi x=0\Leftrightarrow \sigma\varphi x=-1\Leftrightarrow \sigma\varphi x=\sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z}.$ Όμως, $x\in(0,\pi)$ άρα $0<x<\pi\Leftrightarrow 0<\kappa\pi-\frac{\pi}{4}<\pi\Leftrightarrow 0<\kappa-\frac{1}{4}<1\Leftrightarrow \frac{1}{4}<\kappa<\frac{5}{4},\kappa\in\mathbb{Z},$ άρα $k=1$ οπότε $x=\frac{3\pi}{4}.$ Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι $x=0$ και $x=\frac{3\pi}{4}.$

Δ2. Έχουμε $f'(x)=\begin{cases}-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}, & x\in[-1,0)\\ e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x), & x\in(0,\pi]\end{cases}.$

Για $x\in[-1,0)$ η $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$ αφού είναι συνεχής στο 0. Για $x\in(0,\pi]$ $f'(x)>0\Leftrightarrow e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)>0\Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x>0.$ Για $x\neq\pi$ είναι $\eta\mu x>0$ στο $(0,\pi)$ άρα $1+\sigma\varphi x>0\Leftrightarrow \sigma\varphi x>-1\Leftrightarrow \sigma\varphi x>\sigma\varphi\frac{3\pi}{4}$ και η $\sigma\varphi x$ γνησίως φθίνουσα στο $(0,\pi)$ άρα $x<\dfrac{3\pi}{4}$.

x	-1	0	3π/4 π
$-\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$	-		
$e^{x}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$		+	-
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=[-1,0]$ αφού είναι συνεχής στο $[-1,0]$. Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ αφού είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$. Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_3=\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$ αφού είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$. Επίσης, $f(A_1)=[f(0),f(-1)]=[0,1]$, $f(A_2)=\left[f(0),f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $f(A_3)=\left[f(\pi),f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, άρα $f([-1,\pi])=\left[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Επειδή $\dfrac{3\pi}{4}>1\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}>e>2$ και $\sqrt{2}>1$ και πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>2\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>1$. Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)=1$, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\dfrac{3\pi}{4}$ το $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο π το $f(\pi)=0$.

Δ3. Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=e^{x}\eta\mu x-e^{5x}=e^{x}\left(\eta\mu x-e^{4x}\right)<0$, διότι για $x\in[0,\pi]$ το $0\le\eta\mu x\le 1$ και $0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le 4x\le 4\pi\Leftrightarrow e^{0}\le e^{4x}\le e^{4\pi}$. Άρα, $\eta\mu x\le e^{4x}\Rightarrow\eta\mu x-e^{4x}\le 0$.

$$E=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}(g(x)-f(x))dx=\int_0^{\pi}\left(e^{5x}-e^{x}\eta\mu x\right)dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}-\mathrm{I}=\frac{e^{5\pi}}{5}-\frac{1}{5}-\mathrm{I},$$

όπου $I=\int_0^{\pi}e^{x}\eta\mu x dx=\int_0^{\pi}\left(e^{x}\right)'\eta\mu x dx=\left[e^{x}\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{x}\sigma\upsilon\nu x dx=0-\int_0^{\pi}\left(e^{x}\right)'\sigma\upsilon\nu x dx=$ $=-\left[e^{x}\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{x}(-\eta\mu x)dx=e^{\pi}+1-\mathrm{I}$. Άρα, $2I=e^{\pi}+1\Leftrightarrow I=\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$. Τελικά,

$$E=\frac{e^{5\pi}}{5}-\frac{1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}=\frac{e^{5\pi}-1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}\ \tau.\mu.$$

Δ4.

$$16e^{\frac{-3\pi}{4}}f(x)-e^{\frac{-3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$$

Για $x\in[-1,\pi]=D_f$ διαιρούμε με $16e^{\frac{-3\pi}{4}}$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$$f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-3\pi}{4}}$$

$$f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \quad \boxed{1}$$

- Όμως $f(x)\le f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $x\in[-1,\pi]$ αφού από Δ2 η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{4}$

  Άρα $f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\le 0$, $x\in[-1,\pi]$ $\boxed{2}$
- $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\ge 0$, $x\in[-1,\pi]$ $\boxed{3}$

Για να ισχύει η ισότητα $\boxed{1}$ από $\boxed{2}$ και $\boxed{3}$ πρέπει

$$\begin{cases} f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0 \\ \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4} \text{ αφού f 1-1} \\ x=\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Οπότε η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=\frac{3\pi}{4}$