ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ.111

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ104

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ.128

Α4.

α) Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$

$h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ h(x)=\ln x$

$D_{goh}=\left\{x\in D_h\,/\,h(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in(0,+\infty)\,/\ln x\in\mathbb{R}\right\}=(0,+\infty)$

$$(goh)(x)=g\left(h(x)\right)=\frac{4-e^{2h(x)}}{e^{h(x)}}=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-e^{\ln x^2}}{x}=\frac{4-x^2}{x}$$

Οπότε, $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x},\ x\in(0,+\infty)$.

Β2. i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\frac{\left(4-x^2\right)'\cdot x-\left(4-x^2\right)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{-2x\cdot x-\left(4-x^2\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{-2x^2-4+x^2}{x^2}=\frac{-x^2-4}{x^2}=$$

$$=-\frac{x^2+4}{x^2}<0\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x>0,\acute{\alpha}\rho\alpha\ \ f\ \ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha.$$

ii) Γνωρίζουμε ότι:

$$e<\pi\overset{f\downarrow D_f}{\Rightarrow}f(e)>f(\pi)\Rightarrow\frac{4-e^2}{e}>\frac{4-\pi^2}{\pi}\underset{e\pi>0}{\overset{\cdot(e\pi)}{\Leftrightarrow}}\left(4-e^2\right)\cdot\pi>\left(4-\pi^2\right)\cdot e$$

$$\underset{\substack{4-e^2<0\\ e>0}}{\Leftrightarrow}\frac{\cancel{\left(4-e^2\right)}\cdot\pi}{e\cancel{\left(4-e^2\right)}}<\frac{\left(4-\pi^2\right)\cdot\cancel{e}}{\cancel{e}\cdot\left(4-e^2\right)}\Leftrightarrow\frac{\pi}{e}<\frac{4-\pi^2}{4-e^2}\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$$

Β3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(4-x^2\right)\frac{1}{x}\right] = +\infty$$

$$\textit{γιατί } \lim_{x\to 0^+}\left(4-x^2\right) = 4 > 0 \textit{ και } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

Άρα, η ευθεία x=0 $(y'y)$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Οριζόντια/Πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = -1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} \overset{\frac{4}{+\infty}}{=} 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta = 0$$

Άρα η ευθεία $y = -1\cdot x + 0 \Rightarrow y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f $\textit{στο}+\infty$.

Β4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} \overset{\frac{1}{-\infty}}{=} 0$.

Κοντά στο $+\infty$ ισχύει:

$$\left|\frac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right| = \left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right| \quad \text{αφού } \left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right| \le 1$$

Άρα, $\left|\frac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{f(x)}\right| \le \frac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right) \le \left|\frac{1}{f(x)}\right|$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right] = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 0\end{array}\right\} \xrightarrow{\textit{κριτήριο παρεμβολής}} \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right] = 0$$