

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ,  
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ  
ΣΠΟΥΔΩΝ Ι & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ:  
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Σχολικό βιβλίο σελ.232

**A2.** Σχολικό βιβλίο σελ.303

**A3.** α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Η  $C_f$  διέρχεται από το Α άρα ισχύει

$$f(3) = 2 \Leftrightarrow \frac{3\alpha - 1}{3 + 1} = 2 \Leftrightarrow 3\alpha - 1 = 8 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

**B2.** Για  $\alpha = 3$  είναι  $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$ ,  $x \neq -1$

Έστω  $x_1, x_2 \in A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$  με  $f(x_1) = f(x_2)$ . Τότε ισχύει:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3x_1 - 1}{x_1 + 1} = \frac{3x_2 - 1}{x_2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_1 \cdot x_2 + 3x_1 - x_2 - 1 = 3x_1 \cdot x_2 + 3x_2 - x_1 - 1 \Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1

**B3** Η  $f$  είναι 1-1, οπότε είναι αντιστρέψιμη

$$\text{Είναι } f(x) = \psi \Leftrightarrow \frac{3x - 1}{x + 1} = \psi \Leftrightarrow \psi x + \psi = 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow \psi x - 3x = -\psi - 1 \Leftrightarrow x(\psi - 3) = -\psi - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\psi + 1}{3 - \psi}, \quad 3 - \psi \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = \frac{\psi + 1}{3 - \psi}, \quad \psi \neq 3 \quad . \quad \text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{3 - x}, \quad x \neq 3$$

**B4.** Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση  $f(x) = f^{-1}(x)$  στο σύνολο  $R - \{3, -1\}$

$$\text{Είναι } f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \frac{3x - 1}{x + 1} = \frac{x + 1}{3 - x} \Leftrightarrow$$

$$9x - 3x^2 - 3 + x = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα οι  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  τέμνονται στο σημείο  $T(1,1)$  (Είναι  $f(1) = \dots = 1$ )

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $A = (2, +\infty)$ , ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{Είναι } f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2} \cdot (x-2)' = 1 + \frac{1}{(x-2)^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in A. \quad \text{Άρα } f \uparrow A$$

Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $A = (2, +\infty)$ , ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων. Είναι } f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^4} \cdot [(x-2)^2]' = -\frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{2}{(x-2)^3} < 0$$

για κάθε  $x \in A$ . Άρα η  $f$  είναι κοίλη στο  $A$

**Γ2.** Η  $f$  είναι συνεχής στο  $A = (0, +\infty)$  με τύπο

$$f(x) = \frac{x(x-2) + (x-2) - 1}{x-2} = \frac{x^2 - x - 3}{x-2}$$

$$\sqcup \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ (x^2 - x - 3) \cdot \frac{1}{x-2} \right] = -\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x - 3) = 2^2 - 2 - 3 = -1 < 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 2 - 2 = 0$$

με  $x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{1}{x-2} \right) = +\infty$ . Άρα η ευθεία  $x = 2$  είναι κατακόρυφη

ασύμπτωτη της  $C_f$

$$\sqcup \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - x - 3}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 3 - x^2 + 2x}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 = \beta. \text{ Άρα η ευθεία } \psi = \lambda x + \beta = x + 1 \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη}$$

της  $C_f$  στο  $+\infty$

**Γ3.** Οι συναρτήσεις  $f$  και  $g(x) = x + 1$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $[\lambda, \lambda + 1]$  και ισχύει

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{x-2} \stackrel{x>2}{<} 0, \text{ για κάθε } x \in [\lambda, \lambda + 1]$$

$$\text{Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι: } E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+1} -(f(x) - g(x)) dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1} \frac{1}{x-2} dx =$$

$$= \left[ \ln|x-2| \right]_{\lambda}^{\lambda+1} = \ln|\lambda+1-2| - \ln|\lambda-2| \stackrel{\lambda>2}{=} \ln(\lambda-1) - \ln(\lambda-2) = \ln \frac{\lambda-1}{\lambda-2}$$

$$\text{Γ4. Είναι } E(\lambda) > \ln 2 \Leftrightarrow \ln \frac{\lambda-1}{\lambda-2} > \ln 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda-2} > 2 \stackrel{\lambda-2>0}{\Leftrightarrow} \lambda-1 > 2\lambda-4$$

$$\Leftrightarrow \lambda < 3 \text{ και } \lambda > 2. \text{ Άρα είναι } E(\lambda) > \ln 2 \Leftrightarrow 2 < \lambda < 3$$

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Στα διαστήματα  $(0,1)$  και  $(1,+\infty)$  η  $f$  έχει τύπο  $f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$ , οπότε είναι συνεχής

ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0). \text{ Άρα η } f \text{ είναι συνεχής στο } 0$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{1} = \ln 1 + 1 = 1 = f(1)$$

Άρα η  $f$  είναι συνεχής στο  $1$ . Οπότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $A = [0, +\infty)$

**Δ2.** Για κάθε  $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$  η  $f$  έχει τύπο  $f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$ , οπότε είναι παραγωγίσιμη

ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f'(x) &= \frac{(x \ln x)'(x-1) - x \ln x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x \ln x}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{-\ln x + x - 1}{(x-1)^2} . \text{ Έστω η συνάρτηση } g(x) = -\ln x + x - 1 , x > 0 \end{aligned}$$

Η  $g$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $B = (0, +\infty)$  , ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{Είναι } g'(x) = -\frac{1}{x} + 1 = \frac{x-1}{x} , \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 , \quad g'(x) < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Άρα η  $g$  παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το  $g(1) = \dots = 0$  .Οπότε για κάθε  $x > 0$  ισχύει

$$g(x) \geq g(1) = 0 . \text{ Η ισότητα ισχύει μόνο για } x = 1$$

Άρα για κάθε  $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$  ισχύει  $g(x) > 0 \Rightarrow -\ln x + x - 1 > 0$

$$\Rightarrow \frac{-\ln x + x - 1}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 . \text{ Όμως η } f \text{ είναι συνεχής στο } A , \text{ άρα } f \uparrow A$$

$$\Delta 3. \text{ Είναι } f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \quad (1)$$

Για  $x = 1$  η (1) γράφεται  $f(1) = f\left(\frac{1}{1}\right) + \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = f(1)$  , που ισχύει

$$\text{Για } 0 < x \neq 1 \text{ ισχύει: } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{-\frac{\ln x}{x}}{\frac{1-x}{x}} = \frac{\ln x}{x-1} \quad (2)$$

$$\text{οπότε } f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = \frac{\ln x}{x-1} + \ln x = \frac{\ln x}{x-1} + \frac{(x-1)\ln x}{x-1} = \frac{x \ln x}{x-1} = f(x)$$

Άρα για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$

$$\Delta 4. \text{ Έχουμε } f(e^x) = \frac{e^x \ln e^x}{e^x - 1} = \frac{x e^x}{e^x - 1}$$

(το  $x \in \mathbb{R} + \mathbb{Y}$  οπότε χρησιμοποιούμε τον μεσαίο κλάδο της συνάρτησης  $f$ )

Επίσης λόγω της (1) έχουμε:  $e^{f(x)} = e^{f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x} = e^{f\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot e^{\ln x} = x e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x e^x}{e^x - 1}}{x e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(e^x - 1) e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{e^x - 1} \cdot \frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}} \right) = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

διότι

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$$\left( \text{θέτουμε } u = f\left(\frac{1}{x}\right), \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \right)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1$$