

β) Για το σωλήνα ΒΓ εφαρμόζουμε εξίσωση συνέχειας $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = 2v_1$.

Εφαρμόζουμε Bernoulli μεταξύ των θέσεων Δ και Γ.

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow \rho g h + p_{atm} = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow h = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_1^2}{g} \quad (1)$$

Για το δοχείο, εφαρμόζουμε Torricelli: $v_3 = \sqrt{2gH} \Rightarrow H = \frac{v_3^2}{2g}$ (2)

Επειδή η στάθμη του δοχείου παραμένει σταθερή $\Pi_r = \Pi_z \Rightarrow A_2 v_2 = A_3 v_3 \Rightarrow v_3 = 4v_1$ (3)

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3) στη σχέση (2) προκύπτει $H = \frac{8v_1^2}{g}$ (4)

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (4) έχουμε $\frac{h}{H} = \frac{3}{16}$.

B3. α) Σωστή απάντηση είναι η **ii**.

β) Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ από το Α στο Δ

$$W_{\tau_f} = K_{\Delta} - K_A \Rightarrow F \cdot L \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \xrightarrow{(S.I.)} \omega = 3\pi \text{ r/s}$$

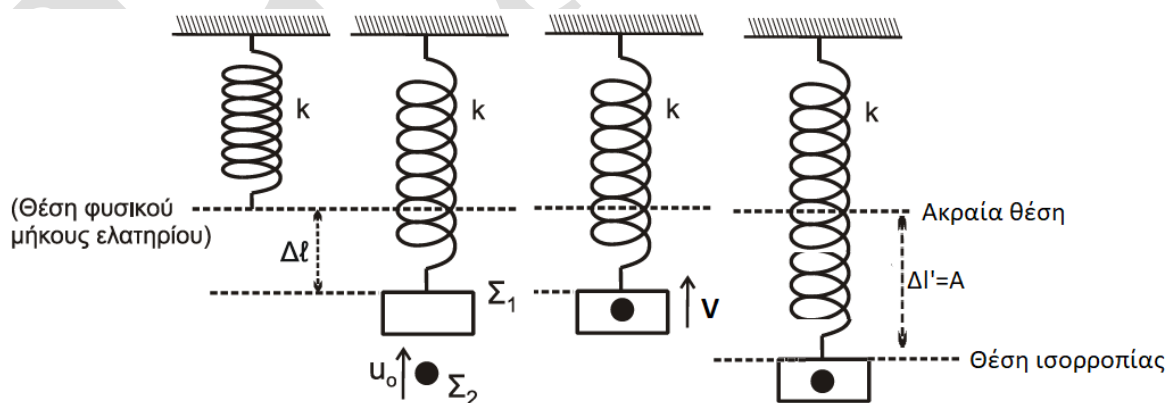
Για την κρούση στο Δ εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης της στροφορμής. (Στη θέση της σύγκρουσης, η ροπή του βάρους στη ράβδο είναι μηδενική). Επιπλέον θεωρούμε ότι το σώμα μικρών διαστάσεων είναι ακίνητο πριν την κρούση.

$$\frac{1}{3} ML^2 \omega = \left(\frac{1}{3} ML^2 + mL^2 \right) \omega' \Rightarrow \omega' = \frac{3\pi}{2} \text{ rad/s}$$

Από το Δ στο Ε έχουμε ομαλή στροφορική κίνηση (για $\Delta\theta = \pi/2 \text{ rad}$).

$$\omega' = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{3} \text{ s.}$$

ΘΕΜΑ Γ



Γ1.

Από την ισορροπία του σώματος Σ_1 πριν την κρούση έχουμε:

$$k\Delta l = m_1 g \Rightarrow k = 200 \text{ N/m}$$

Για τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος έχουμε (η παραμόρφωση του ελατηρίου που υπολογίζουμε αντιστοιχεί στο νέο πλάτος της ταλάντωσης):

$$k\Delta l' = (m_1 + m_2)g \Rightarrow A = \Delta l' = 0,1m$$

Γ2.

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση αμέσως μετά την κρούση

$$E_t = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l' - \Delta l)^2$$

Όπου $\Delta l' - \Delta l = 0,05m$. Εκτελώντας τις πράξεις η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση προκύπτει ίση με $V = \frac{\sqrt{3}}{2} m/s$.

Από την ΑΔΟ κατά την κρούση έχουμε:

$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow v_0 = \sqrt{3} m/s$$

Άρα, η κινητική ενέργεια του Σ_2 πριν την κρούση είναι $K_2 = \frac{1}{2}m_2 v_0^2 = 1,5 J$.

Γ3.

Η μεταβολή της ορμής του Σ_2 κατά την κρούση έχει αλγεβρική τιμή (θετική η φορά προς τα πάνω).

$$\Delta p_2 = p'_2 - p_2 = m_2 V - m_2 v_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} kg \cdot m/s$$

Δηλαδή η μεταβολή της ορμής έχει φορά προς τα κάτω.

Γ4.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι ίση με: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 10 rad/s$.

Από την εξίσωση απομάκρυνσης – χρόνου:

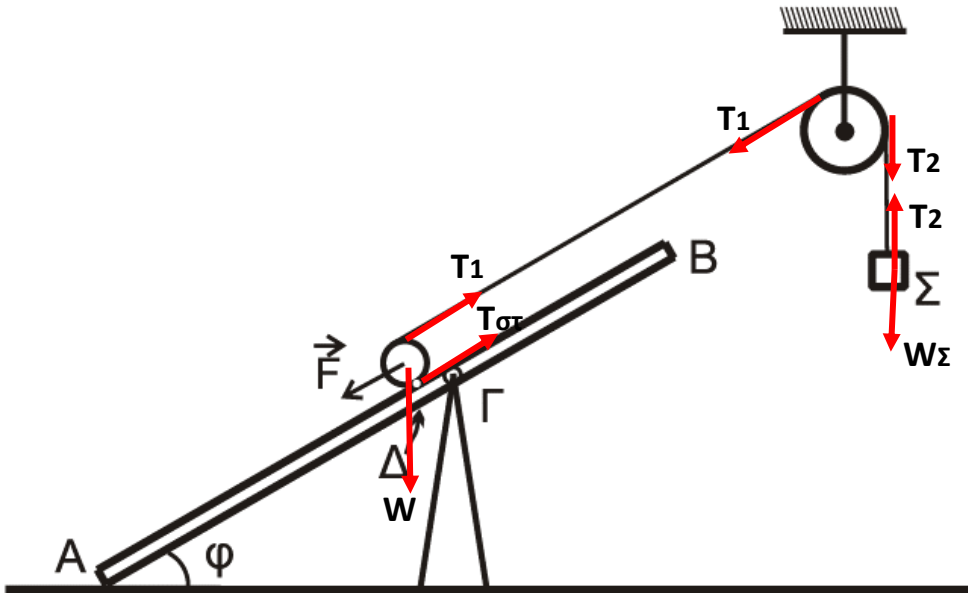
$$x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,1 \cdot \eta\mu(10 \cdot t + \varphi_0) \xrightarrow{t=0, x=0,05m} \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{0 \leq \varphi_0 < 2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = \frac{\pi}{6} rad \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} rad \end{array} \right. \xrightarrow{t=0, v>0} \varphi_0 = \frac{\pi}{6} rad \end{array}$$

Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης είναι $x = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$ (S.I.)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



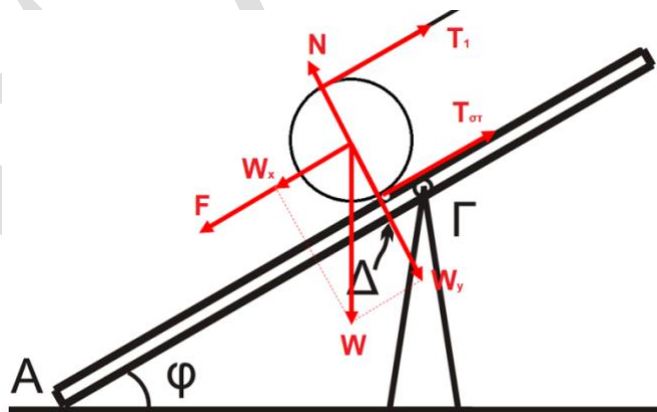
Το σώμα Σ ισορροπεί, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό είναι μηδενική, συνεπώς: $W_{\Sigma} = T_2 = 20N$.

Από την ισορροπία της τροχαλίας (δεν περιστρέφεται) έχουμε:

$$\Sigma \tau_{\text{τροχαλία}} = 0 \Rightarrow T_1 \cdot R_{\text{τρ}} - T_2 \cdot R_{\text{τρ}} = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 = 20N$$

Ο κύλινδρος δεν περιστρέφεται οπότε:

$$\Sigma \tau_{\text{κύλινδρος}} = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} \cdot R_{\kappa} - T_1 \cdot R_{\kappa} = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = T_1 = 20N$$



Για τον κύλινδρο ισχύει

$$W_{\kappa} = M_{\kappa} \cdot g = 20N$$

$$W_x = W_{\kappa} \cdot \eta\mu 30 = 10N$$

$$W_y = W_{\kappa} \cdot \sigma\upsilon\nu 30 = 10\sqrt{3}N$$

Ο κύλινδρος είναι ακίνητος, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτόν είναι μηδενική, συνεπώς: $\Sigma F = 0 \Rightarrow F + W_x = T_1 + T_{\sigma\tau} \Rightarrow F = 30N$

Δ2.

Ο κύλινδρος κυλά χωρίς να ολισθαίνει, συνεπώς $a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu,K} R_K$. Το ανώτατο σημείο του έχει ταχύτητα $2v_{cm}$, άρα και επιτάχυνση $2a_{cm}$.

Από το σχήμα είναι φανερό ότι για το σώμα $a_S = 2a_{cm}$.

Θεωρώντας ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία, για την τροχαλία ισχύει $2a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu,T} R_T$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του σώματος Σ:

$$\Sigma F = M_S a_S \Rightarrow M_S g - T'_2 = M_S 2a_{cm}$$

Για την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας έχουμε:

$$\Sigma \tau = I_T a_{\gamma\omega\nu,T} \Rightarrow (T'_2 - T'_1) R_T = \frac{1}{2} M_T R_T^2 a_{\gamma\omega\nu,T}$$

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma F = M_K a_{cm} \Rightarrow T'_{\sigma\tau} + T'_1 - W_x = M_K a_{cm}$$

Και για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma \tau = I_K a_{\gamma\omega\nu,K} \Rightarrow (T'_1 - T'_{\sigma\tau}) R_K = \frac{1}{2} M_K R_K^2 a_{\gamma\omega\nu,K}$$

Επιλύοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει

$$a_{cm} = 2 \text{ m/s}^2 \text{ και } a_S = 4 \text{ m/s}^2$$

Δ3.

Αρχικά ο κύλινδρος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Άρα τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,5\text{s}$ ο κύλινδρος έχει $v_1 = a_{cm} t_1 = 1\text{m/s}$ και έχει διανύσει απόσταση ίση με: $\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 = 0,25 \text{ m}$.

Μετά το κόψιμο του νήματος έχουμε για τον κύλινδρο:

Ο κύλινδρος κυλά χωρίς να ολισθαίνει, συνεπώς: $a'_{cm} = a'_{\gamma\omega\nu,K} R_K$

Για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε: $\Sigma \tau = I_K a'_{\gamma\omega\nu,K} \Rightarrow T''_{\sigma\tau} R_K = \frac{1}{2} M_K R_K^2 a'_{\gamma\omega\nu,K}$

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε: $\Sigma F = M_K a'_{cm} \Rightarrow W_x - T''_{\sigma\tau} = M_K a'_{cm}$

Από τα παραπάνω προκύπτει $a'_{cm} = \frac{10}{3} \text{ m/s}^2$.

Από τη στιγμή t_1 και έπειτα ο κύλινδρος εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι να σταματήσει. Κατά συνέπεια $v = v_1 - a'_{cm} \Delta t \Rightarrow \Delta t = 0,3 \text{ s}$.

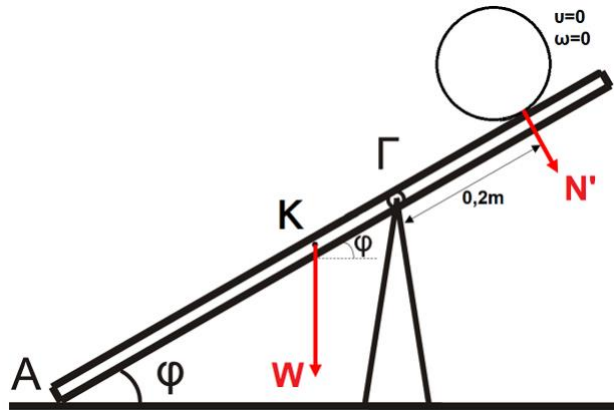
Άρα $t_2 = t_1 + \Delta t = 0,8\text{s}$.

Δ4.

Το συνολικό διάστημα που διένυσε ο κύλινδρος είναι

$$s = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 0,25 + v_1 \Delta t - \frac{1}{2} a'_{cm} \Delta t^2 = 0,4 \text{ m}$$

Δ5.



Στο ψηλότερο σημείο που θα φτάσει ο κύλινδρος, E (το οποίο απέχει 0,2 m από το Γ), υπολογίζουμε τις ροπές του βάρους της σανίδας και της αντίδρασης της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον κύλινδρο ως προς το Γ:

$$\frac{\tau_N}{\tau_W} = \frac{N \cdot GE}{W \sin \varphi GM} = \frac{W_K \sin \varphi GE}{W \sin \varphi GM} = 0,4 < 1$$

Άρα $\tau_N < \tau_W$ και συνεπώς τότε η αντίδραση στο A είναι θετική και η ράβδος δεν ανατρέπεται.