ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΔΕΚΑ (10)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΠΛΗΡΕΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α, **Α2.** δ, **Α3.** γ, **Α4.** β,

Α5. **α.** Σ
β. Λ
γ. Σ
δ. Σ
ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) Σωστή απάντηση είναι η **iii.**
β) <u>Αιτιολόγηση</u>

Επειδή τα δύο σώματα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις και έχουν πριν την πλαστική τους κρούση ίσες κινητικές ενέργειες, αντιλαμβανόμαστε ότι:

$$K_1 = K_2 \Longrightarrow \frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m_2 \upsilon_2^2 \Longrightarrow m\upsilon_1^2 = 4m\upsilon_2^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \upsilon_1^2 = 4\upsilon_2^2$$

Άρα, για τις αντίστοιχες αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σωμάτων πριν από την κρούση τους προκύπτει ότι:

$$\upsilon_1 = -2\upsilon_2.$$

Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κεντρική και πλαστική τους κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{o\lambda} = \vec{p}'_{o\lambda} \Longrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V},$$

όπου $\vec{V}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά από την κρούση. Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει και αλγεβρικά, είναι:

$$m(-2\upsilon_2) + 4m\upsilon_2 = 5mV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{2}{5}\upsilon_2 \quad (\text{αλγεβρικά})$$

Επομένως, για ο ζητούμενος λόγος των κινητικών ενεργειών είναι:

$$\frac{K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}} = \frac{K_{\sigma\upsilon\sigma}}{K_1 + K_2} = \frac{K_{\sigma\upsilon\sigma}}{2K_1} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2}{2 \cdot \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2} = \frac{5m\left(\frac{2}{5}\upsilon_2\right)^2}{2m(-2\upsilon_2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}} = \frac{5 \cdot \frac{4}{25} \cdot \upsilon_2^2}{2 \cdot 4 \cdot \upsilon_2^2} = \frac{1}{10}.$$

Β2. α) Σωστή απάντηση είναι η **i.**

β) Αιτιολόγηση

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Β στην ανώτερη ελεύθερη επιφάνεια του νερού και του σημείου 1 (της ίδιας ρευματικής γραμμής με το Β) στην έξοδο της χαμηλότερης οπής (1) έχουμε ότι:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + \rho g(H - h_1) = p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{p_B = p_1 = p_{atm} \text{ και } \upsilon_B \cong 0} \rho g(H - h_1) = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2g(H - h_1)} \quad (\text{Θεώρημα Torricelli})$$

Όμοια, από το θεώρημα Torricelli για την ταχύτητα εξόδου ενός στοιχείου ρευστού από την υψηλότερη οπή (2), θα έχουμε:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(H - h_2)} = \sqrt{2g(H - 3h_1)}$$

Κάθε στοιχείο ρευστού (νερό), μετά την έξοδό του εκτελεί οριζόντια βολή. Επομένως, οι αντίστοιχοι χρόνοι πτώσεις θα ισούνται με

$$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad \text{και} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3h_1}{g}}$$

Άρα, για τα βεληνεκή των βολών (τα οποία είναι ίσα) προκύπτει ότι:

$$s_1 = s_2 \Longrightarrow \upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2g(H-h_1)} \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{2g(H-3h_1)} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot 3h_1}{g}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow h_1(H-h_1) = 3h_1(H-3h_1) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow H - h_1 = 3H - 9h_1 \Longrightarrow 2H = 8h_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow H = 4h_1.$$

B3. α) Σωστή απάντηση είναι η **iii.**

β) <u>Αιτιολόγηση</u>

Επειδή δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές στον σφαιρικό αστέρα κατά τη συρρίκνωσή του, συμπεραίνουμε ότι κατά τη διάρκεια του φαινομένου η ιδιοστροφορμή του διατηρείται. Δηλαδή, η αρχική τιμή του μέτρου της ιδιοστροφορμής του και η τιμή του μέτρου της ιδιοστροφορμής του τη στιγμή του υποδιπλασιασμού της ακτίνας του, θα είναι ίσες. Οπότε

$$L_0 = L \Longrightarrow I_{cm,0}\omega_0 = I_{cm}\omega \Longrightarrow \frac{2}{5}mr_0^2 \cdot \omega_0 = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \omega \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r_0^2 \cdot \omega_0 = \left(\frac{r_0}{2}\right)^2 \cdot \omega \Longrightarrow \omega = 4\omega_0$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του αστέρα τετραπλασιάστηκε. Επομένως, για το ζητούμενο λόγο θα έχουμε:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}{\frac{1}{2}I_{cm,0}\omega_0^2} = \frac{\frac{2}{5}m\left(\frac{r_0}{2}\right)^2 \cdot (4\omega_0)^2}{\frac{2}{5}mr_0^2 \cdot \omega_0^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{K}{K_0} = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή $r_1 < r_2$ και σε συνδυασμό με τη γραφική παράσταση που μας δίνεται, αντιλαμβανόμαστε ότι το σημείο Σ ξεκινάει την κίνησή του τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}35s$ (τότε φθάνει η διαταραχή από την πηγή Π_1 στο σημείο Σ), καθώς επίσης πως η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Σ ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t_2 = 0{,}55s$ (τότε φθάνει η διαταραχή από την πηγή Π_2 στο σημείο Σ).

Επομένως, για τη ζητούμενη ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού, έχουμε:

$$\upsilon_\delta = \frac{r_1}{t_1} = \frac{1{,}4}{0{,}35} = \frac{14}{\frac{7}{2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\upsilon_\delta = 4\, m/s}$$

Όμοια, η ζητούμενη απόσταση r_2 είναι:

$$\upsilon_\delta = \frac{r_2}{t_2} \Longrightarrow r_2 = \upsilon_\delta t_2 = 4 \cdot 0{,}55 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{r_2 = 2{,}2\, m}$$

Γ2. Από τη δοθείσα γραφική παράσταση αντιλαμβανόμαστε επίσης ότι η περίοδος ταλάντωσης των δύο πηγών είναι:

$$t_2 - t_1 = 2T \Longrightarrow 2T = 0{,}55 - 0{,}35 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2T = 0{,}2 \Longrightarrow T = 0{,}1\, s$$

Άρα, η ζητούμενη συχνότητα

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{f = 10\, Hz}$$

Οπότε, από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, το μήκος κύματος των κυμάτων θα προκύψει ίσο με:

$$\upsilon_\delta = \lambda f \Longrightarrow \lambda = \frac{\upsilon_\delta}{f} = \frac{4}{10} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda = 0{,}4\, m}$$

Γ3. Επειδή $t = \frac{5}{8} s = 0{,}625\, s > t_2 = 0{,}55\, s$, η ζητούμενη απομάκρυνση θα προκύψει από την αντίστοιχη εξίσωση απομάκρυνσης κατά τη συμβολή δύο σύγχρονων πηγών.

Επίσης, από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι το πλάτος ταλάντωσης των δύο πηγών είναι $A = 5 \cdot 10^{-2}\, m$. Επομένως, αντικαθιστώντας στην εξίσωση

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right),$$

προκύπτει:

$$y_\Sigma = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\pi \frac{0{,}8}{0{,}4}\right) \cdot \eta\mu 2\pi \left(10 \cdot \frac{5}{8} - \frac{3{,}6}{2 \cdot 0{,}4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_\Sigma = 10^{-1} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{25}{4} - \frac{9}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_\Sigma = 0{,}1 \eta\mu 2\pi \left(\frac{25}{4} - \frac{18}{4}\right) = 0{,}1 \eta\mu \left(2\pi \cdot \frac{7}{4}\right) = 0{,}1 \eta\mu \frac{7\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_\Sigma = 0{,}1 \eta\mu \left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1 \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_\Sigma = -0{,}1\, m}$$

Γ4. Έστω ένα σημείο Δ του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές Π_1 και Π_2, το οποίο παραμένει διαρκώς ακίνητο μετά τη συμβολή. Εάν $r_{\Delta,1}$ η απόσταση του σημείου Δ από την πηγή Π_1 και $r_{\Delta,2}$ η απόσταση του σημείου Δ από την πηγή Π_2, τότε οι αποστάσεις αυτές θα ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$r_{\Delta,1} - r_{\Delta,2} = (2N + 1)\frac{\lambda}{2}, \qquad N \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

και

$$r_{\Delta,1} + r_{\Delta,2} = d \quad (2)$$

Επίσης, καθώς το σημείο Δ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ θα ισχύει και

$$0 \leq r_{\Delta,1} \leq d \quad (3)$$

Επομένως,

$$(1) + (2) \Rightarrow 2r_{\Delta,1} = (2N + 1)\frac{\lambda}{2} + d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{\Delta,1} = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \quad (4)$$

Οπότε

$$(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} 0 \leq (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \leq d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{2} \leq (2N+1)\frac{\lambda}{4} \leq \frac{d}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} \leq N \leq \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{0{,}4} - \frac{1}{2} \leq N \leq \frac{2}{0{,}4} - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5{,}5 \leq N \leq 4{,}5$$

Επειδή $N \in \mathbb{Z}$, αντιλαμβανόμαστε ότι οι δυνατές τιμές που μπορεί να λάβει ο N είναι:

$$N = -5 \text{ ή } -4 \text{ ή } -3 \text{ ή } -2 \text{ ή } -1 \text{ ή } 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2 \text{ ή } 3 \text{ ή } 4$$

Δηλαδή, συνολικά 10 διαφορετικές τιμές.
Οπότε, θα έχουμε και <u>10 σημεία ακυρωτικής συμβολής</u> στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή το στερεό Σ ισορροπεί, συμπεραίνουμε ότι η συνολική ροπή που θα ασκείται ως προς τον άξονα περιστροφής του θα είναι μηδέν. Επίσης, καθώς όλα τα νήματα είναι αβαρή χωρίς να ολισθαίνουν και τα σώματα Σ_1 και Σ_2 ισορροπούν και αυτά, θα έχουμε ότι (το μέτρο της τάσης του νήματος στον εξωτερικό κύλινδρο είναι ίσο με το μέτρο του συνολικού βάτους των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2):

$$\Sigma\vec{\tau}_{(O)} = \vec{0} \Rightarrow FR = (m_1 + m_2)g \cdot 2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = (2+3) \cdot 10 \cdot 2 = 5 \cdot 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F = 100\ N}$$

Δ2. Για το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ ως προς τον άξονα Ο΄Ο έχουμε

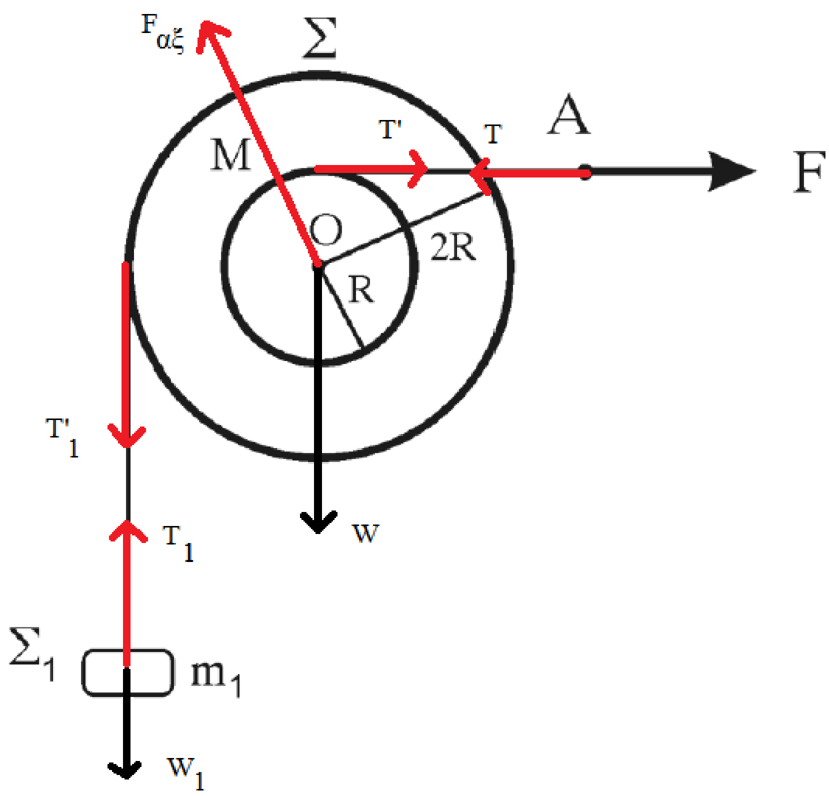
$$\tau_{F_{(O)}} = FR = 100 \cdot 0{,}1 = 10\ Nm$$

ενώ για το μέτρο της ροπής του βάρους του σώματος Σ$_1$ ως προς τον άξονα περιστροφής Ο΄Ο έχουμε

$$\tau_{w_{1(O)}} = m_1 g \cdot 2R = 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 0{,}1 = 4\ Nm$$

Επειδή $\tau_{F_{(O)}} > \tau_{w_{1(O)}}$ συμπεραίνουμε ότι το στερεό Σ θα περιστραφεί ωρολογιακά και το σώμα Σ$_1$ θα κινηθεί κατακόρυφα προς τα πάνω.
Επομένως (ήταν αρχικά ακίνητο) και η κατεύθυνση της επιτάχυνσης που θα αποκτήσει το σώμα Σ$_1$, μετά το κόψιμο του νήματος που το συνδέει με το σώμα Σ$_2$, θα είναι κατακόρυφη προς τα επάνω.

Μετά το κόψιμο του νήματος που συνδέει τα σώματα Σ$_1$ και Σ$_2$, οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Επειδή τα νήματα είναι αβαρή

$$F = T = T' \text{ (κατά μέτρο)}$$

και

$$T_1 = T'_1 > W_1 \text{ (κατά μέτρο)}$$

Επειδή ο άξονας Ο΄Ο είναι ακλόνητος, το στερεό Σ θα εκτελέσει μόνον περιστροφική κίνηση (μάλιστα ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση), ενώ το σώμα Σ_1 μεταφορική κίνηση (ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη). Από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής τόσο για το στερεό Σ, όσο και για το σώμα Σ_1 θα έχουμε:

Για το στερεό Σ:

$$\Sigma\tau_{(O)} = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow FR - T_1 \cdot 2R = \frac{3}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F - 2T_1 = \frac{3}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

Για το σώμα Σ_1:

$$\Sigma F_1 = m_1 a_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow T_1 - W_1 = m_1 a_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \quad (2)$$

Σύνδεσμος: Επειδή τα νήματα δεν ολισθαίνουν στους κυλίνδρους, θα ισχύει ότι:

$$a_1 = \alpha_{\varepsilon\pi,\pi\varepsilon\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot 2R \quad (3)$$

Επομένως

$$(1) \overset{(3)}{\Longrightarrow} F - 2T_1 = \frac{3}{2}MR \cdot \frac{a_1}{2R} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F - 2T_1 = \frac{3}{4}Ma_1 \quad (4)$$

Άρα

$$(4) \overset{(2)}{\Longrightarrow} F - 2(m_1 a_1 + m_1 g) = \frac{3}{4}Ma_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F - 2m_1 a_1 - 2m_1 g = \frac{3}{4}Ma_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{3}{4}M + 2m_1\right)a_1 = F - 2m_1 g \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a_1 = \frac{F - 2m_1 g}{\frac{3}{4}M + 2m_1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a_1 = \frac{100 - 2\cdot 2\cdot 10}{\frac{3}{4}\cdot 8 + 2\cdot 2} = \frac{60}{10} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_1 = 6\ m/s^2}$$

Δ3. Για το ζητούμενο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής (ως προς τον άξονα Ο΄Ο) του στερεού Σ, αρκεί να υπολογίσουμε τη συνισταμένη εξωτερική ροπή στο στερεό Σ ως προς τον άξονα Ο΄Ο, καθώς

$$\frac{dL_{(O)}}{dt} = \Sigma\tau_{(O)}$$

Είναι δηλαδή

$$\frac{dL_{(O)}}{dt} = FR - T_1 \cdot 2R \quad (5)$$

Όμως

$$(2) \Longrightarrow T_1 = m_1(a_1 + g) = 2(6 + 10) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow T_1 = 32\ N$$

Οπότε

$$(5) \Longrightarrow \frac{dL_{(O)}}{dt} = 100\cdot 0{,}1 - 32\cdot 0{,}2 = 10 - 6{,}4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dL_{(O)}}{dt} = 3{,}6\ kg\cdot m^2/s^2}$$

Δ4. Εφόσον το στερεό Σ έχει εκτελέσει $N = \frac{20}{\pi}$ περιστροφές, αντιλαμβανόμαστε ότι θα έχει στραφεί κατά

$$\Delta\theta = 2\pi N = 2\pi \cdot \frac{20}{\pi} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta\theta = 40\ rad$$

Επομένως, έως τότε, το ζητούμενο έργο της δύναμης F (έργο σταθερής ροπής) θα ισούται με:

$$W_F = \tau_{F_{(O)}} \cdot \varDelta\theta = FR \cdot \varDelta\theta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow W_F = 100 \cdot 0{,}1 \cdot 40 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{W_F = 400\,J}$$