

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ.186

A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ.142

A3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ.161

A4.

α) Σ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_f = (-\infty, 1]$ και $D_g = [0, +\infty)$

Πεδίο Ορισμού:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [0, +\infty) \mid g(x) \in (-\infty, 1]\} = [0, 1] \text{ γιατί}$$

$$g(x) \in (-\infty, 1] \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Τύπος:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

B2. $h(x) = (f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2, x \in [0, 1]$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική

Για κάθε $x \in (0, 1)$, $h'(x) = ((x - 1)^2)' = 2(x - 1)(x - 1)' = 2(x - 1) < 0$ και

επειδή είναι συνεχής στο $[0, 1]$ η h είναι γνησίως φθίνουσα το $[0, 1]$ άρα 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

Εύρεση αντίστροφης:

$$h(x) = y \Leftrightarrow (x - 1)^2 = y \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2} = \sqrt{y} \text{ με } y \geq 0, |x - 1| = \sqrt{y} \text{ με } y \geq 0 \text{ και επειδή}$$

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x - 1 \leq 0 \text{ έχουμε } -(x - 1) = \sqrt{y} \Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$$

Επιπλέον,

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sqrt{y} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq y \geq 0$$

Επομένως, $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0, 1]$:

B3.

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

i)

- Η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x}) \cdot (1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2} = \phi(1)$$

Οπότε η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$

- Επιπλέον, $\left. \begin{matrix} \phi(0) = 1 \\ \phi(1) = \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \phi(0) \neq \phi(1)$

Οπότε, ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $[0,1]$

ii)

$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και η συνάρτηση $\eta_{\mu\chi}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε

$$\eta_{\mu} \frac{\pi}{6} < \eta_{\mu\alpha} < \eta_{\mu} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta_{\mu\alpha} < 1 \Rightarrow \phi(1) < \eta_{\mu\alpha} < \phi(0)$$

Από το παραπάνω ερώτημα B3i ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών για τη ϕ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\phi(x_0) = \eta_{\mu\alpha}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\text{Για } x < -1: f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)'$$

Άρα υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x) = -2x + c_1$.

$$\text{Για } x > -1: f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - x)'$$

Άρα υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x) = x^3 - x + c_2$.

Επιπλέον, έστω $f(-1) = c_3$.

Είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0^3 - 0 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Και η f συνεχής στο -1 (ως παραγωγίσιμη), άρα

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + c_1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - x) = c_3.$$

Άρα:

$$2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2 \text{ και } c_3 = 0.$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases} = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2

$$\begin{aligned} (\varepsilon): y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \\ y - (x_0^3 - x_0) &= (3x_0^2 - 1)(x - x_0). \end{aligned}$$

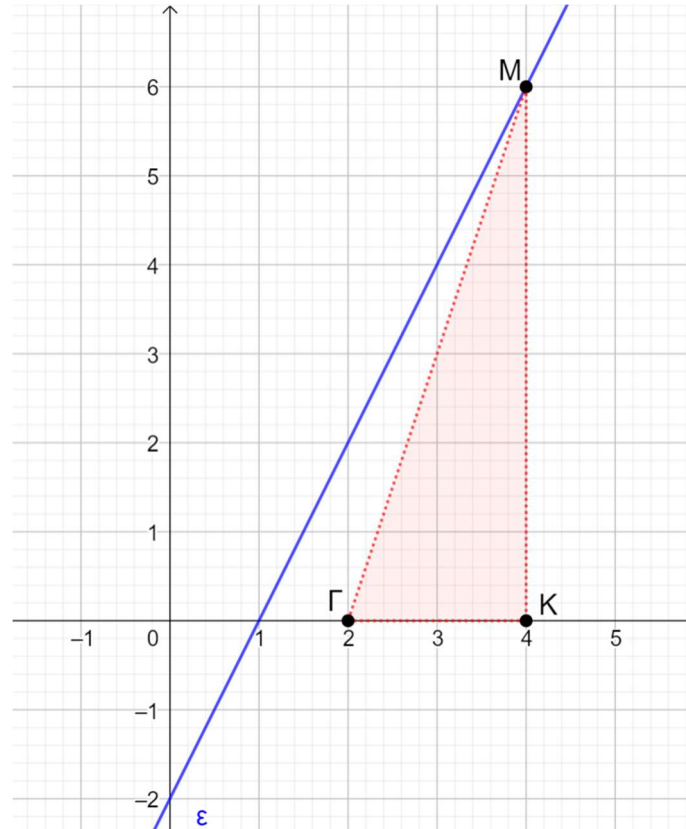
Για $x = 0$ και $y = -2$:

$$\begin{aligned} -2 - x_0^3 + x_0 &= (3x_0^2 - 1)(-x_0) \Leftrightarrow \\ -2 - x_0^3 + x_0 &= -3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow 2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1. \end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση της (ε) είναι:

$$y - (1 - 1) = (3 - 1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2.$$

Γ3.



Τη χρονική στιγμή t έχουμε ότι:

$$M(x(t), 2x(t) - 2) \quad , \quad \mu\epsilon \quad x(t) > 2 \quad .$$

Και

$$x(t_0) = 3, \quad x'(t_0) = 2 \quad \kappa\alpha\iota \quad y(t_0) = 4 \quad .$$

Είναι:

$$E(t) = \frac{(x(t) - 2)(2x(t) - 2)}{2} \Leftrightarrow E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$$

Και

$$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t) \quad .$$

Για $t = t_0$:

$$E'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) - 3x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6 \text{ } \tau\mu/s$$

Γ4.

Έστω l το ζητούμενο όριο.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = -2 \cdot (-\infty) = +\infty \quad .$$

Άρα (θέτοντας $f(x) = \omega$):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu \omega}{\omega} = l_1 ,$$

Όπου:

$$|\eta \mu \omega| \leq 1 \iff \left| \frac{\eta \mu \omega}{\omega} \right| \leq \frac{1}{|\omega|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|\omega|} \leq \frac{\eta \mu \omega}{\omega} \leq \frac{1}{|\omega|}$$

Και

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|\omega|} \right) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\omega|} = 0 ,$$

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής: $l_1 = 0$.

Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = l_2 .$$

Θέτουμε $x = -u$, άρα:

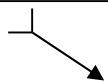
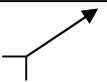
$$l_2 = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1-(-u)^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3 - u}{1+u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1$$

Οπότε: $l = l_1 + l_2 = 0 + 1 = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) $D_f = (0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως διαφορά

συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 1 - \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Επομένως η συνάρτηση f :

- είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 1)$

• είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$

• παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$, αφού

$$e < 3 \Rightarrow \ln e < \ln 3 \Rightarrow 1 - \ln 3 < 0$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln(3x)) = \quad (\text{θέτουμε } u = 3x, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x) = 0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln u) = +\infty$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) \right) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(3x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) = 1 - 0 = 1 > 0$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα , άρα ισχύει

$$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty)$$

Στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα , άρα ισχύει

$$f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty)$$

Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$, υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$, που είναι

μοναδικό , αφού $f \downarrow \Delta_1$. Ισχύει $x_1 < 1$ αφού $f(1) = 1 - \ln 3$

Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$, υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$, που είναι μοναδικό ,

αφού $f \uparrow \Delta_2$. Ισχύει $x_2 > 1$ αφού $f(1) = 1 - \ln 3$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Οπότε η } f \text{ είναι κυρτή , αφού είναι}$$

συνεχής και ισχύει $f''(x) > 0$ στο $D_f = (0, +\infty)$

Δ2. Ισχύει $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ή } x = x_2$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και ισχύει $f(x) \leq 0$ κάθε $x \in [x_1, x_2]$

Πράγματι ισχύει $x_1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x) \Rightarrow f(x) \leq 0$ και

$1 \leq x \leq x_2 \Rightarrow f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x) \leq 0$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{x_1}^{x_2} -f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln(3x) - x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x) dx - \int_{x_1}^{x_2} x dx = I_1 - I_2, \text{ όπου}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln(3x) dx = [x \ln(3x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x (\ln(3x))' dx \\ &= x_2 \ln(3x_2) - x_1 \ln(3x_1) - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x} dx = x_2 x_2 - x_1 x_1 - \int_{x_1}^{x_2} 1 dx \\ &= x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

(αφού $f(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 - \ln(3x_1) = 0 \Rightarrow \ln(3x_1) = x_1$ και

$f(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 - \ln(3x_2) = 0 \Rightarrow \ln(3x_2) = x_2$)

$$= x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) \text{ και } I_2 = \int_{x_1}^{x_2} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}$$

$$\text{Άρα } E = I_1 - I_2 = x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2) - (x_2 - x_1) = \frac{1}{2} ((x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)) =$$

$$= \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$$

Δ3.

Α τρόπος

Έστω $f(2 - x_1) \geq 0$

Αν $f(2 - x_1) = 0 \Leftrightarrow 2 - x_1 = x_1 \text{ ή } 2 - x_1 = x_2$

(αφού οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι μόνο οι αριθμοί x_1, x_2)

- $2 - x_1 = x_1 \Leftrightarrow 1 = x_1$ άτοπο αφού $x_1 < 1$
- $2 - x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$ άτοπο αφού από Δ2 προκύπτει $E = 0$

Αν $f(2-x_1) > 0 \Leftrightarrow 2-x_1 < x_1$ ή $2-x_1 > x_2$

(αφού όπως δείξαμε στο Δ2 $f(x) \leq 0$ στο $[x_1, x_2]$ και $f(x) > 0$ στο

$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ διότι $x < x_1 \xRightarrow{f \downarrow \Delta_1} f(x) > f(x_1) \Rightarrow f(x) > 0$ και

$x > x_2 \xRightarrow{f \uparrow \Delta_2} f(x) > f(x_2) \Rightarrow f(x) > 0$)

- $2-x_1 < x_1 \Leftrightarrow 2x_1 > 2 \Leftrightarrow x_1 > 1$ άτοπο αφού $x_1 < 1$
- $2-x_1 > x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 < 0$ άτοπο αφού από Δ2 προκύπτει $E < 0$

Β τρόπος

- Ισχύει $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow \boxed{2-x_1 > 1}$
- Το εμβαδόν E του ερωτήματος Δ2 είναι θετικός αριθμός

$$E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2) > 0 \Leftrightarrow x_2 + x_1 - 2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x_2 > 2 - x_1}$$

Επομένως έχουμε $x_2 > 2 - x_1 > 1 \xRightarrow{f \uparrow (1, +\infty)} f(x_2) > f(2-x_1) \Leftrightarrow \boxed{0 > f(2-x_1)}$

Δ4.

Α τρόπος

Η εξίσωση γράφεται

$$f(x) + f(x) = 1 - \ln 3 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) + f(x) = f(1) + f'(x_2)(x - x_2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x) - f(1) = f'(x_2)(x - x_2) - f(x)}$$

- Η f είναι κυρτή επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο x_2 (με εξαίρεση το σημείο επαφής) δηλαδή $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow \boxed{0 \geq f'(x_2)(x - x_2) - f(x)}$ (αφού $f(x_2) = 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$)
- Η f έχει ολικό ελάχιστο για $x=1$ επομένως ισχύει $\boxed{f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$

Επομένως για να ισχύει η ισότητα $f(x) - f(1) = f'(x_2)(x - x_2) - f(x)$ αρκεί

$$\begin{cases} f(x) - f(1) = 0 \\ f'(x_2)(x - x_2) - f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_2 \end{cases} \text{ άτοπο αφού } x_2 \neq 1$$

Β τρόπος

Η εξίσωση γράφεται

$$f(x) + f(x) = 1 - \ln 3 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) + f(x) = f(1) + f'(x_2)(x - x_2)$$

- Η f είναι κυρτή επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο x_2 (με εξαίρεση το σημείο επαφής) δηλαδή $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$ **1** (αφού $f(x_2) = 0$)
- Η f έχει ολικό ελάχιστο για $x=1$ επομένως ισχύει $f(x) \geq f(1)$ **2** και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες **1** και **2** προκύπτει

$$f(x) + f(x) > f(1) + f'(x_2)(x - x_2)$$

(η ισότητα δεν μπορεί να ισχύει αφού δεν γίνεται το x να είναι ίσο ταυτόχρονα με x_2 και 1), επομένως η δοθείσα εξίσωση $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ είναι αδύνατη