ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΠΑΛΑΙΟ)
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο , σελ. 111
Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο , σελ. 104
Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο , σελ. 74

Α3. **α)** Ψ
β) Πράγματι, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=x$, $x\in R$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x=0$, όμως το όριο της συνάρτησης $\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει στο 0 , αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

Α4.
α) Σ **β)** Σ **γ)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f=R-\{3\}$

Έστω $x_1,x_2\in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε ισχύει:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3}=\frac{3x_2+1}{x_2-3}\Rightarrow (3x_1+1)(x_2-3)=(3x_2+1)(x_1-3)$$

$$\Rightarrow 3x_1x_2-9x_1+x_2-3=3x_1x_2-9x_2+x_1-3\Rightarrow 10x_1=10x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι 1-1 , οπότε είναι αντιστρέψιμη

Β2. Είναι $f(x)=\psi\Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{x-3}=\psi\Leftrightarrow x\psi-3\psi=3x+1\Leftrightarrow x\psi-3x=3\psi+1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(\psi-3)x=3\psi+1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\psi+1}{\psi-3}\ ,\ \psi\neq 3$$

Όμως $x\in D_f\Leftrightarrow \dfrac{3\psi+1}{\psi-3}\neq 3\Leftrightarrow 3\psi+1\neq 3\psi-9\Leftrightarrow 0\psi\neq 10\Leftrightarrow \psi\in R-\{3\}$

Άρα $f^{-1}(\psi)=\frac{3\psi+1}{\psi-3}$, $\psi\neq 3$, οπότε $f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-3}$, $x\neq 3$

Είναι $D_f=D_{f^{-1}}=R-\{3\}$ και για κάθε $x\neq 3$ ισχύει $f(x)=f^{-1}(x)$

Οπότε $f=f^{-1}$

Β3. Για να ορίζεται η $f\circ f$ αρκεί:

$$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ \frac{3x+1}{x-3}\neq 3 \Leftrightarrow 3x+1\neq 3x-9 \Leftrightarrow 0x\neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq 3$$

Άρα η $f\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=R-\{3\}$ και τύπο

$$\left(f\circ f\right)(x)=f\left(\mathrm{f}(x)\right)=\frac{3\cdot\frac{3x+1}{x-3}+1}{\frac{3x+1}{x-3}-3}=\frac{\frac{9x+3+x-3}{x-3}}{\frac{3x+1-3x+9}{x-3}}=\frac{10x}{10}=x$$

Β4. Κοντά στο $-\frac{1}{3}$ ισχύει $\left|f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|=\left|f(x)\right|\left|\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|\leq\left|f(x)\right|\cdot 1\Rightarrow$

$$-\left|f(x)\right|\leq f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\leq\left|f(x)\right|$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{3x+1}{x-3}=\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1}{-\frac{1}{3}-3}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left(-\left|f(x)\right|\right)=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left|f(x)\right|=0$

Οπότε με το κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left(f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right)=0$

ΘΕΜΑ Γ

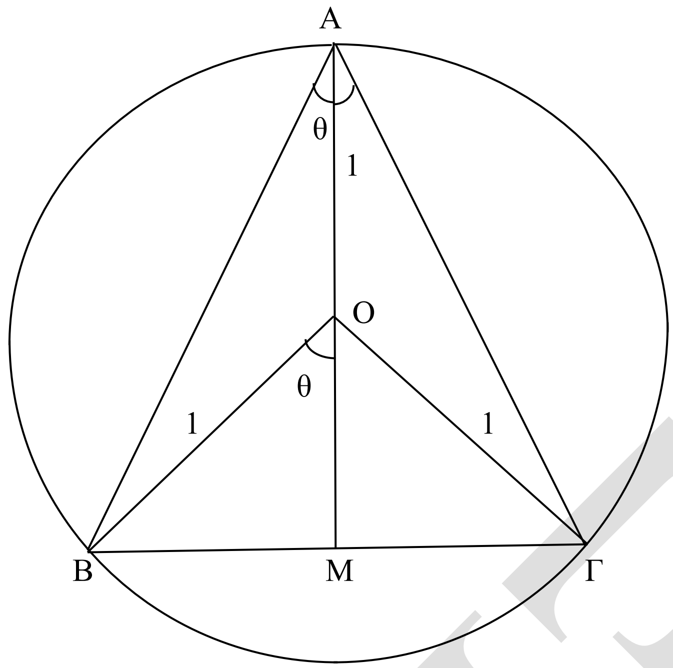
Γ1. Η εγγεγραμμένη γωνία ΒΑΓ και η επίκεντρη γωνία ΒΟΓ βαίνουν στο τόξο ΒΓ , άρα ισχύει $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=2\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma\Leftrightarrow\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{M}+\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=2\theta$

$\Leftrightarrow\theta+\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=2\theta\Leftrightarrow\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=\theta$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΓ η ΟΜ είναι διχοτόμος , άρα είναι και ύψος

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΜ έχουμε $\eta\mu\theta=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{BM}}{1}=\mathrm{BM}$ και

$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{OM}}{1}=\mathrm{OM}$. Είναι $\mathrm{B}\Gamma=2\mathrm{BM}=2\eta\mu\theta$



Οπότε ισχύει $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{AM} = \frac{1}{2} \cdot 2\eta\mu\theta(\mathrm{AO} + \mathrm{OM}) = \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$

Άρα $\mathrm{E}(\theta) = \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in (0, \pi)$

Γ2. $D_{\mathrm{E}} = (0, \pi) = \Delta$

Η $\mathrm{E}(\theta)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $\mathrm{E}'(\theta) = (\eta\mu\theta)'(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) + \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)'$

$= \sigma\upsilon\nu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) + \eta\mu\theta(-\eta\mu\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$= 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = (\sigma\upsilon\nu\theta + 1)(2\sigma\upsilon\nu\theta - 1)$

Για κάθε $\theta \in (0, \pi)$ ισχύει $-1 < \sigma\upsilon\nu\theta < 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta + 1 > 0$

Είναι $2\sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$, αφού $\theta \in (0, \pi)$

$2\sigma\upsilon\nu\theta - 1 > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta > \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \overset{\sigma\upsilon\nu\theta \downarrow (0,\pi)}{\Leftrightarrow} 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$

$2\sigma\upsilon\nu\theta - 1 < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta < \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \overset{\sigma\upsilon\nu\theta \downarrow (0,\pi)}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{3} < \theta < \pi$

2ος τρόπος για το πρόσημο της συνάρτησης $h(\theta)=2\sigma\upsilon\nu\theta-1$, $\theta\in(0,\pi)$

Είναι $h(\theta)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\theta-1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$, αφού $\theta\in(0,\pi)$

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ και δεν μηδενίζεται , άρα διατηρεί πρόσημο . Είναι $h\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}-1=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\sqrt{3}-1>0$, οπότε ισχύει $h(\theta)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ και δεν μηδενίζεται , άρα διατηρεί πρόσημο . Είναι $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-1=-1<0$, οπότε ισχύει $h(\theta)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$

θ	0	$\pi/3$	π
$\sigma\upsilon\nu\theta+1$	$+$		$+$
$2\sigma\upsilon\nu\theta-1$	$+$	0	$-$
$\mathrm{E}'(\theta)$	$+$	0	$-$
$\mathrm{E}(\theta)$	$\nearrow$		$\searrow$

Άρα η $\mathrm{E}(\theta)$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\theta=\frac{\pi}{3}$

Οπότε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ μεγιστοποιείται όταν $\theta=\frac{\pi}{3}$

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\mathrm{E}(\theta)=\frac{3}{4}$ έχει ακριβώς δύο λύσεις

Σύμφωνα με το Γ2 ισχύει $\mathrm{E}'(\theta)>0$ για κάθε $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ και επειδή η $\mathrm{E}(\theta)$ είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$, προκύπτει ότι $\mathrm{E}\uparrow\left(0,\frac{\pi}{3}\right]=\Delta_1$

Οπότε $\mathrm{E}(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{E}(\theta),\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{E}(\theta)=\eta\mu 0(1+\sigma\upsilon\nu 0)=0$

και $\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{3}\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Επίσης ισχύει $E'(\theta)<0$ για κάθε $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ και επειδή η $E(\theta)$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$, προκύπτει ότι $E\downarrow\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)=\Delta_2$

Οπότε $E(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to\pi^-}E(\theta),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$, αφού $\lim\limits_{x\to\pi^-}E(\theta)=\eta\mu\pi\left(1+\sigma\upsilon\nu\pi\right)=0$

Επειδή $\frac{3}{4}\in E(\Delta_1)$ η εξίσωση $E(\theta)=\frac{3}{4}$ έχει μια τουλάχιστον λύση $\theta_1\in\Delta_1$ που είναι μοναδική αφού $E\uparrow\Delta_1$

Επειδή $\frac{3}{4}\in E(\Delta_2)$ η εξίσωση $E(\theta)=\frac{3}{4}$ έχει μια τουλάχιστον λύση $\theta_2\in\Delta_2$ που είναι μοναδική αφού $E\downarrow\Delta_2$

Τελικά η εξίσωση $E(\theta)=\frac{3}{4}$ έχει ακριβώς δύο λύσεις $\theta_1,\theta_2\in\Delta$ με $\theta_1<\theta_2$

Γ4. Η $E(\theta)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$, αφού είναι συνεχής στο $\Delta=(0,\pi)$. Η $E(\theta)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ. Άρα για την $E(\theta)$ ισχύει το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$

Οπότε υπάρχουν $\xi_1\in\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$ τέτοιοι , ώστε

$$E'(\xi_1)=\frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right)-E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}=\frac{\frac{3\sqrt{3}-3}{4}}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)E'(\xi_1)=\frac{3\sqrt{3}-3}{4}\qquad(1)\qquad\text{και}$$

$$E'(\xi_2)=\frac{E(\theta_2)-E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{3-3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{3\sqrt{3}-3}{4}}{\frac{\pi}{3}-\theta_2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)E'(\xi_2)=\frac{3\sqrt{3}-3}{4}\qquad(2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)E'(\xi_1)=\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)E'(\xi_2)$

Τελικά υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1,\xi_2\in\Delta=(0,\pi)$ τέτοιοι , ώστε να ισχύει $\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)E'(\xi_1)=\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)E'(\xi_2)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $D_f=(0,+\infty)=\Delta$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη , ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'-\frac{1}{\lambda x}(\lambda x)'$

$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-\frac{\lambda}{\lambda x}=\ln x+1-\frac{1}{x}$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη , ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$

Άρα f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

Ισχύει $f'(1)=\ln 1+1-\frac{1}{1}=0$, $x>1\overset{f'\uparrow\Delta}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$

$0<x<1\overset{f'\uparrow\Delta}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$, το $f(1)=\ln 1-\ln\lambda=-\ln\lambda$

Το σημείο $A(1,-\ln\lambda)$ ακροτάτου της f ανήκει στην ευθεία $x=1$, αφού για κάθε $\lambda>0$ ισχύει $-\ln\lambda\in R$

Δ2. Για κάθε $x>0$ είναι $x^x\geq\lambda x\Leftrightarrow\ln x^x\geq\ln(\lambda x)\Leftrightarrow x\ln x-\ln(\lambda x)\geq 0$

$\Leftrightarrow f(x)\geq 0\Leftrightarrow\min f(x)\geq 0\Leftrightarrow -\ln\lambda\geq 0\Leftrightarrow\ln\lambda\leq 0\Leftrightarrow\ln\lambda\leq\ln 1\Leftrightarrow 0<\lambda\leq 1$

Οπότε η ζητούμενη τιμή του λ είναι η $\lambda=1$

Δ3. $D_g=(0,+\infty)=\Delta$

Για $\lambda=1$ είναι $f(x)=x\ln x-\ln x$ και $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$

Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)=x^x=e^{x\ln x}$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x)=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x\left((x)'\ln x+x(\ln x)'\right)=x^x(\ln x+1)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, \mathrm{g}(x_0))$ είναι

$\varepsilon:\ \psi - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \psi - {x_0}^{x_0} = {x_0}^{x_0}(\ln x_0 + 1)(x - x_0)$

Η (ε) διέρχεται από το $\mathrm{O}(0,0)$ αν ισχύει

$$0 - {x_0}^{x_0} = {x_0}^{x_0}(\ln x_0 + 1)(0 - x_0) \Leftrightarrow -{x_0}^{x_0} = -x_0{x_0}^{x_0}(\ln x_0 + 1) \Leftrightarrow 1 = x_0(\ln x_0 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \ln x_0 + 1 \Leftrightarrow \ln x_0 + 1 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \overset{\Delta 1}{\Leftrightarrow} x_0 = 1$$

Οπότε η ευθεία $\varepsilon:\ \psi - 1 = 1(\ln 1 + 1)(x - 1) \Leftrightarrow \psi = x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της C_g που διέρχεται από το $\mathrm{O}(0,0)$

Δ4. $D_h = [0, +\infty)$

i. Στο διάστημα $(0, +\infty)$ η συνάρτηση h έχει τύπο $h(x) = x^x = g(x)$, άρα είναι συνεχής , σύμφωνα με το Δ3

Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} =$

$$\left(\begin{array}{l} \text{θέτουμε } u = x\ln x \text{ , οπότε } \lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0 \end{array}\right)$$

$= \lim\limits_{u\to 0^+} e^u = e^0 = 1 = h(0)$

Άρα η h είναι συνεχής και στο 0 , οπότε είναι συνεχής

ii. Έστω η συνάρτηση

$\varphi(x) = x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)dt\right) + (1 - x)\int_0^1 h(1-t)dt\ ,\ x \in [0,1]$

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Ισχύει $\varphi(0) = 0^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)dt\right) + (1 - 0)\int_0^1 h(1-t)dt = \int_0^1 h(1-t)dt =$

$$\left(\begin{array}{l} \text{θέτουμε } u = 1 - t \text{ , οπότε } du = (1-t)'dt = -dt \\ \text{είναι } u_1 = 1 - 0 = 1 \text{ και } u_2 = 1 - 1 = 0 \end{array}\right)$$

$= \int_1^0 h(u)(-du) = \int_0^1 h(u)du = \int_0^1 h(x)dx > 0$

Πράγματι η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $h(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$, αφού $h(0)=1$ και $h(x)=x^x>0$ για κάθε $x\in(0,1]$. Άρα $\int_0^1 h(x)dx>0$

Ισχύει $\varphi(1)=1^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)dt\right)+(1-1)\int_0^1 h(1-t)dt=3-2\int_1^2 g(t)dt$

$=3-2\int_1^2 g(x)dx<0$

Πράγματι η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ και για κάθε $x\in[1,2]$ ισχύει $g(x)=x^x\geq x$, σύμφωνα με το Δ2 ($\lambda=1$) . Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$

Οπότε έχουμε $\int_1^2 g(x)dx>\int_1^2 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\int_1^2 g(x)dx>\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2\int_1^2 g(x)dx>3\Rightarrow 3-2\int_1^2 g(x)dx<0$

Άρα ισχύει $\varphi(1)\varphi(2)<0$. Οπότε με το Θ.Bolzano η εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow$ $x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)dt\right)+(1-x)\int_0^1 h(1-t)dt=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$