ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο

Α3. **α)** Ψ

β) Θεωρία, σχολικό βιβλίο

Α4.

α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $D_f = (1,+\infty)$ και $D_g = R$

Για να ορίζεται η $f \circ g$ αρκεί:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A} = (0,+\infty)$ και τύπο

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

Β2. Έστω $x_1, x_2 \in \mathrm{A}$ με $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$. Τότε ισχύει:

$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1} \Rightarrow (e^{x_1} + 2)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_2} + 2)(e^{x_1} - 1)$$

$$\Rightarrow e^{x_1}e^{x_2} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - 2 = e^{x_1}e^{x_2} - e^{x_2} + 2e^{x_1} - 2 \Rightarrow 3e^{x_1} = 3e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η $f \circ g$ είναι 1-1 , οπότε είναι αντιστρέψιμη.

Είναι $(f \circ g)(x) = \psi \Leftrightarrow \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1} = \psi \Leftrightarrow \psi(e^x - 1) = e^x + 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \psi e^x - \psi = e^x + 2 \Leftrightarrow \psi e^x - e^x = \psi + 2 \Leftrightarrow (\psi - 1)e^x = \psi + 2$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{\psi+2}{\psi-1}\ ,\ \psi \neq 1 \ \text{ και } \ \frac{\psi+2}{\psi-1} > 0 \Leftrightarrow (\psi+2)(\psi-1) > 0$$

$$x = \ln\left(\frac{\psi+2}{\psi-1}\right)\ ,\ \psi < -2 \ ή\ \psi > 1$$

Όμως $x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\psi+2}{\psi-1}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{\psi+2}{\psi-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{\psi+2}{\psi-1} - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\psi+2-\psi+1}{\psi-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\psi-1} > 0 \Leftrightarrow \psi - 1 > 0 \Leftrightarrow \psi > 1$$

Άρα $(f\circ g)^{-1}(\psi) = \ln\left(\frac{\psi+2}{\psi-1}\right)\ ,\ \psi > 1$

Οπότε $(f\circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\ ,\ x > 1$

B3. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη , ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Είναι $\varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)'(x-1)-(x-1)'(x+2)}{(x-1)^2}$

$= \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)(x+2)} < 0$, αφού $x > 1$

Άρα $\varphi \downarrow (1,+\infty)$

B4.

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{l} θέτουμε\ u = \frac{x+2}{x-1}\ ,\ οπότε\ \lim\limits_{x\to 1^+} u = \lim\limits_{x\to 1^+}\left((x+2)\frac{1}{x-1}\right) = +\infty \\ αφού\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x+2) = 3 > 0\ και\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty \end{array}\right)$$

$$= \lim_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)= \quad \left(\textit{θέτουμε } u=\frac{x+2}{x-1}\ ,\ \textit{οπότε}\ \lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1\right)$$

$$=\lim_{u\to1}\ln u=\ln 1=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $D_f=\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

Η f είναι συνεχής , οπότε είναι συνεχής και στο 0 , άρα ισχύει

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)\quad\Leftrightarrow\lim_{x\to0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=\frac{1}{1-0}-\ln\lambda$$

$$\Leftrightarrow\eta\mu0+\lambda\sigma\upsilon\nu0=1-\ln\lambda\Leftrightarrow\ln\lambda+\lambda-1=0\qquad(1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\lambda)=\ln\lambda+\lambda-1\ ,\lambda>0$. Είναι $g(1)=\ln1+1-1=0$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη $(0,+\infty)$, ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι $g'(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}+1>0$, για κάθε $\lambda>0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα , οπότε είναι συνάρτηση 1-1. Άρα η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται

$g(\lambda)=g(1)\Leftrightarrow\lambda=1$, αφού η g είναι συνάρτηση 1-1

Γ2. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 , με $f'(0)=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}=1$

Για $\lambda=1$ είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}\ , & x\le0\\[2mm] \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\ , & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x(1-x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1-x}=1$ και

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$

Γ3. Στο διάστημα $(-\infty,0)$ η f έχει τύπο $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, οπότε είναι παραγωγίσιμη ως ρητή , με $f'(x)=-\dfrac{1}{(1-x)^2}(1-x)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Στο διάστημα $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ η f έχει τύπο $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, οπότε είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων , με

$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 , με $f'(0)=1$

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f=\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Άρα τα κρίσιμα σημεία αυτής , τα αναζητούμε στις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$

Στο διάστημα $(-\infty,0)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}>0$

Στο διάστημα $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$

$\overset{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}{\Leftrightarrow}\ \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1$, αφού αν $\sigma\upsilon\nu x=0$ τότε και $\eta\mu x=0$ **άτοπο** ($\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$)

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}\ ,\kappa\in \mathrm{Z}$

Όμως $0<x<\dfrac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 0<4\kappa\pi+\pi<6\pi\Leftrightarrow -\pi<4\kappa\pi<5\pi$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}<\kappa<\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow \kappa=0\ \text{ή}\ \kappa=1$

Δεκτές λύσεις είναι οι $x=\dfrac{\pi}{4}$ ή $x=\dfrac{5\pi}{4}$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί $x=\dfrac{\pi}{4}$ ή $x=\dfrac{5\pi}{4}$

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(\alpha, f(\alpha))$ είναι

$\varepsilon:\ \psi-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow \psi-\dfrac{1}{1-\alpha}=\dfrac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)$

Για $\psi=0$ έχουμε $\quad 0-\dfrac{1}{1-\alpha}=\dfrac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)\Leftrightarrow x-\alpha=-\dfrac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\alpha=\alpha-1\Leftrightarrow x=2\alpha-1$

Άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{B}(2\alpha-1,0)$

Η τετμημένη $\alpha(t)$ του Μ και η τετμημένη $x(t)=2\alpha(t)-1$ του Β είναι συναρτήσεις του χρόνου t

Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει $\alpha(t_0)=-1$ και $\alpha'(t_0)=-\frac{\alpha(t_0)}{3}=-\frac{-1}{3}=\frac{1}{3}$

Είναι $x'(t)=2\alpha'(t)$ οπότε $x'(t_0)=2\alpha'(t_0)=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Άρα τη χρονική στιγμή t_0 τετμημένη του Β αυξάνεται με ρυθμό $\frac{2}{3}$ $\mu o\nu/\mathrm{sec}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $D_f=R$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη , ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=e^x+2x-e$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R , ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x)=e^x+2>0$, για κάθε $x\in R$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$, αφού είναι συνεχής στο R

Ισχύει $f'(0)=e^0+2\cdot 0-e=1-e<0$ *και* $f'(1)=e^1+2-e=2>0$, άρα $f'(0)\cdot f'(1)<0$

Άρα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ ώστε $f'(x_0)=0$. Το x_0 είναι μοναδικό στο R, αφού η f' είναι 1-1 , ως γνησίως αύξουσα. Ισχύει $x>x_0 \overset{f'\uparrow \mathrm{R}}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)>0$ και

$x<x_0 \overset{f'\uparrow R}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)<0$

Άρα $f\uparrow[x_0,+\infty)$, $f\downarrow(-\infty,x_0]$ και η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=x_0$, το $f(x_0)=e^{x_0}+{x_0}^2-ex_0-1$

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο

Ισχύει $f'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0\Leftrightarrow e^{x_0}=-2x_0+e$ (1)

Άρα $f(x_0)=e^{x_0}+{x_0}^2-ex_0-1\overset{(1)}{=}(-2x_0+e)+{x_0}^2-ex_0-1={x_0}^2-(e+2)x_0+e-1$

Δ2. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=x_0$, άρα για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)\geq f(x_0)$. Για κάθε $x\neq x_0$ ισχύει $f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)>0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}\right)=+\infty$

Κοντά στο x_0 ισχύει $-1\leq \eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\leq 1\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\leq \frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\leq \frac{1}{f(x)-f(x_0)}+1$$

Όμως $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+1\right)=+\infty$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right)=+\infty$

Δ3. Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-x_0$, $x\in[x_0,1]$

Η g συνεχής στο $[x_0,1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Ισχύει $g(x_0)=f(x_0)+x_0-x_0=f(x_0)<0$

Πράγματι είναι $x_0>0 \overset{f\downarrow(-\infty,x_0]}{\Leftrightarrow} f(x_0)<f(0)\Leftrightarrow f(x_0)<0$

Ισχύει $g(1)=f(1)+1-x_0=e+1-e-1+1-x_0=1-x_0>0$

Άρα $g(x_0)g(1)<0$, οπότε με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(x_0,1)$ ώστε $g(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)+\rho=x_0$

Άρα η εξίσωση $f(x)+x=x_0$ έχει **μια τουλάχιστον** ρίζα στο $(x_0,1)$

Έστω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in(x_0,1)$ με $\rho_1<\rho_2$

Η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, αφού είναι συνεχής στο $[x_0,1]$

Η g παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=f'(x)+1$. Ισχύει $g(\rho_1)=g(\rho_2)=0$

Άρα για την g εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\rho_1,\rho_2]$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2)\subseteq(x_0,1)$ ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=-1$, το οποίο είναι **άτοπο**, αφού $x_0<\xi<1 \overset{f'\uparrow R}{\Rightarrow} f'(\xi)>f'(x_0)=0$

Τελικά ο αριθμός ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)+x=x_0$ στο διάστημα $(x_0,1)$

Δ4. Η f συνεχής στο $[x_0,\rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ), άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(x_0,\rho)$ ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}$$

Ισχύει $x_0 < x_1 < \rho < k \overset{f'\uparrow \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} f'(x_1) < f'(k) \Leftrightarrow \dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(k)$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho - x_0} + 1 < f'(k)+1 \Leftrightarrow \dfrac{f(\rho)-f(x_0)+\rho - x_0}{\rho - x_0} < f'(k)+1$

$\overset{f(\rho)+\rho-x_0=0}{\Leftrightarrow} \dfrac{-f(x_0)}{-f(\rho)} < f'(k)+1 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_0)}{f(\rho)} < f'(k)+1$

$\overset{f(\rho)<0}{\Leftrightarrow} f(x_0) > f(\rho)\left(f'(k)+1\right)$, πράγματι ισχύει $f(\rho)+\rho = x_0 \Rightarrow f(\rho) = x_0 - \rho < 0$