ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

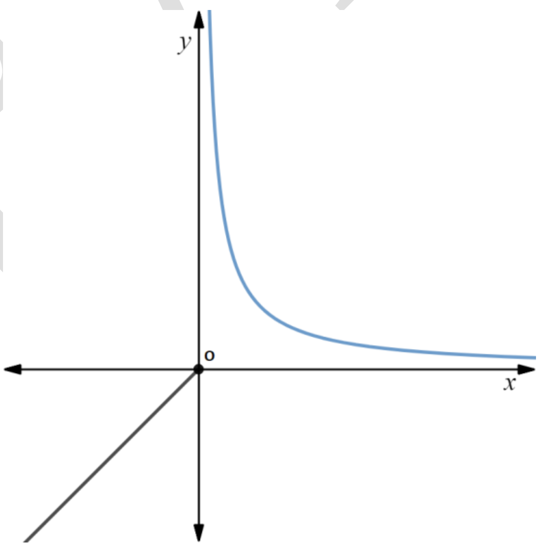
ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 99

Α2. α) Ψ

β) Η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$

είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.
(Σχολικό βιβλίο, σελίδα 35)



Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 216

Α4. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}, \qquad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 1 + \frac{4 \cdot 2x}{x^4} = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$ -2	0	$+\infty$
x^3	$-$	$-$	$+$
$x^3 + 8$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Επειδή $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, -2)$ και f συνεχής στο $(-\infty, -2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in (-\infty, -2]$. $x \in (0, +\infty)$
Επειδή $f'(x) < 0$ στο $(-2{,}0)$ και f συνεχής στο $[-2{,}0)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα αύξουσα για $x \in [-2, 0)$.
Επειδή $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ και f συνεχής στο $(0, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in (0, +\infty)$.
Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -2$ την τιμή $f(-2) = -3$.

Β2.

$$f''(x) = 0 - \frac{8 \cdot 3 \cdot x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Επομένως η C_f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής

B3.

<u>Κατακόρυφη ασύμπτωτη</u>

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty$

δηλαδή η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

<u>Πλάγια-Οριζόντια ασύμπτωτη</u>

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right) = 1-0 = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right) = 0$$

Δηλαδή η ευθεία y =x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο$+\infty$.

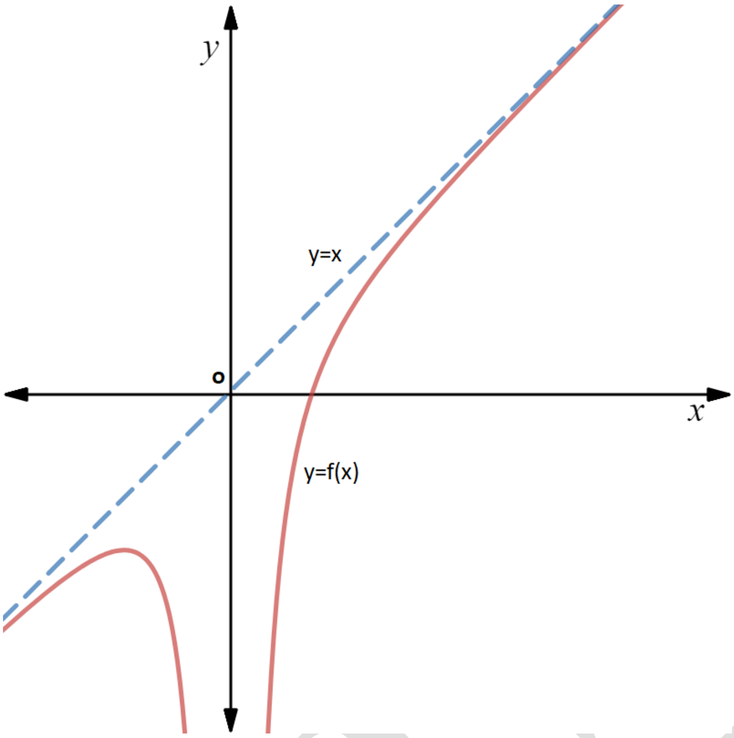
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right) = 1-0 = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to -\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right) = 0$$

Δηλαδή η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

B4.

x	$-\infty$	-2	0 $\quad +\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$			



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έστω E_1 και E_2 τα εμβαδά του τετραγώνου και του κύκλου αντίστοιχα.

Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\alpha = \frac{x}{4}$, άρα

$$E_1 = \alpha^2 = \frac{x^2}{16}.$$

Το μήκος του κύκλου είναι $L = 2\pi\rho$, άρα $2\pi\rho = 8 - x \;\Leftrightarrow\; \rho = \frac{8-x}{2\pi}$ όπου ρ η ακτίνα του κύκλου. Άρα

$$E_2 = \pi\rho^2 = \pi \cdot \frac{(8-x)^2}{4\pi^2} = \frac{x^2 - 16x + 64}{4\pi}.$$

Επομένως,

$$E(x) = E_1 + E_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2 - 16x + 64}{4\pi} = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8).$$

Γ2.

Είναι

$$E'(x)=\frac{1}{16\pi}\cdot\left((\pi+4)x^2-64x+256\right)'=\frac{1}{16\pi}\cdot(2(\pi+4)x-64),$$

οπότε

$$E'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2(\pi+4)x-64=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{32}{\pi+4}$$

$$E'(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad 2(\pi+4)x-64>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{32}{\pi+4}<\ x<8$$

$$E'(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad 2(\pi+4)x-64<0 \quad\Leftrightarrow\quad 0<x<\frac{32}{\pi+4}$$

x	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
$E'(x)$	$-$		$+$
$E(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Επειδή $E'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$ και E συνεχής στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$,

η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$.

Επειδή $E'(x)>0$ στο $\left(\frac{32}{\pi+4},8\right)$ και E συνεχής στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$,

η E είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$.

Άρα η E παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0=\frac{32}{\pi+4}$.

Για $x = x_0$ είναι

$$\alpha = \frac{x_0}{4} = \frac{\frac{32}{\pi + 4}}{4} = \frac{8}{\pi + 4}$$

και

$$2\rho = 2 \cdot \frac{8 - x_0}{2\pi} = \frac{8 - \frac{32}{\pi + 4}}{\pi} = \frac{8\pi}{\pi(\pi + 4)} = \frac{8}{\pi + 4}.$$

Άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων γίνεται ελάχιστο όταν $\alpha = 2\rho$, δηλαδή όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική λύση στο $(0,8)$.

Έστω $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ και $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$.

Επειδή $E'(x) < 0$ στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$ και E συνεχής στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$,

η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ και

$E(\Delta_1) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim\limits_{x\to 0^+} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi(\pi+4)}, \frac{16}{\pi}\right)$ αφού

$$E\left(\frac{32}{\pi + 4}\right) = \frac{(\pi + 4) \cdot \frac{32^2}{(\pi + 4)^2} - 64 \cdot \frac{32}{\pi + 4} + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi(\pi + 4)}$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} E(x) = \frac{256}{16\pi} = \frac{16}{\pi} > 5$$

Επειδή $E'(x) > 0$ στο $\left(\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ και E συνεχής στο $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$,

η E είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ και

$$E(\Delta_2) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^-} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi(\pi+4)}, 4\right)$$

Το $5 \in E(\Delta_1)$ και η E 1-1 στο Δ_1, ως γν. φθίνουσα, οπότε η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική λύση στο Δ_1.

Το $5 \notin E(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $E(x) = 5$ δεν έχει λύση στο Δ_2.

Συνεπώς, η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική λύση στο $(0,8)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 2e^{x-a}(x-a)' - 2x = 2e^{x-a} - 2x.$$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = 2e^{x-a}(x-a)' - 2 = 2e^{x-a} - 2.$$

Είναι

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2e^{x-a} = 2 \;\Leftrightarrow\; e^{x-a} = 1 \;\Leftrightarrow\; x-a = 0 \;\Leftrightarrow\; x = a$$

$$f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 2e^{x-a} > 2 \;\Leftrightarrow\; e^{x-a} > 1 \;\Leftrightarrow\; x-a > 0 \;\Leftrightarrow\; x > a$$

$$f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; 2e^{x-a} < 2 \;\Leftrightarrow\; e^{x-a} < 1 \;\Leftrightarrow\; x-a < 0 \;\Leftrightarrow\; x < a$$

x	$-\infty$	α $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

Επειδή $f''(x) < 0$ στο $(-\infty, a)$ και f συνεχής στο $(-\infty, a]$,

η f κοίλη στο $(-\infty, a]$.

Επειδή $f''(x) > 0$ στο $(\alpha, +\infty)$ και f συνεχής στο $[\alpha, +\infty)$,

η f κυρτή στο $[\alpha, +\infty)$.

Άρα το $A\big(\alpha, f(a)\big)$, δηλαδή το $A(\alpha, 2-\alpha^2)$ είναι μοναδικό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Δ2. Έστω $\Delta_1 = (-\infty, a]$ και $\Delta_2 = [\alpha, +\infty)$.

Είναι $f''(x) < 0$ στο $(-\infty, a)$ και f' συνεχής στο $(-\infty, a]$, άρα f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, a]$.

Είναι $f''(x) > 0$ στο $(\alpha, +\infty)$ και f' συνεχής στο $[\alpha, +\infty)$, άρα f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$.

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, είναι

$$f'(\Delta_1) = [f'(a), \lim_{x\to-\infty} f'(x)) = [2-2a, +\infty)$$

αφού: $f'(a) = 2e^0 - 2a = 2 - 2a$ και

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty \quad (\text{διότι } \lim_{x\to-\infty} e^{x-a} = 0 \quad \text{και } \lim_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty)$$

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2, είναι

$$f'(\Delta_2) = [f'(a), \lim_{x\to+\infty} f'(x)) = [2-2a, +\infty)$$

αφού: $f'(a) = 2e^0 - 2a = 2 - 2a$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^{x-a} - 2x) = \lim_{x\to+\infty}\left[2x\left(\frac{e^{x-a}}{2x} - 1\right)\right] = +\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-a}}{2x}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{x-a})'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-a}}{2} = +\infty$$

Επειδή $a > 1 \Leftrightarrow -2a < -2 \Leftrightarrow 2 - 2a < 0$ άρα $0 \in f'(\Delta_1)$ και f' 1-1 στο Δ_1, ως γνησίως φθίνουσα, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, a)$ ώστε $f'(x_1) = 0$.

Όμοια, $0 \in f'(\Delta_2)$ και f' 1-1 στο Δ_2, ως γνησίως αύξουσα, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (\alpha, +\infty)$ ώστε $f'(x_2) = 0$.

Έχουμε:

για $x < x_1 \xLeftrightarrow{f'\downarrow\ (-\infty,a]} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

για $x_1 < x < a \xLeftrightarrow{f'\downarrow (-\infty,a]} f'(x) < f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

για $a < x < x_2 \xLeftrightarrow{f'\uparrow\ [a,+\infty)} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

για $x > x_2 \xLeftrightarrow{f'\uparrow\ [a,+\infty)} f'(x) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗			↘			↗	

Συνοψίζοντας:

Επειδή $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, x_1)$, και $f'(x) < 0$

για κάθε $x \in (x_1, \alpha)$, η f παρουσιάζει στο x_1 τοπικό μέγιστο.

Επειδή $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$, και $f'(x) < 0$

για κάθε $x \in (x_2, +\infty)$, η f παρουσιάζει στο x_2 τοπικό ελάχιστο.

Άρα υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3.

Έστω $x_1 \geq 1$. Τότε, αφού $f' \downarrow (-\infty, a]$, θα είναι

$$f'(x_1) \leq f'(1) \;\Leftrightarrow\; 0 \leq 2e^{1-a} - 2 \;\Leftrightarrow 2e^{1-a} \geq 2 \;\Leftrightarrow\; e^{1-a} \geq 1 \;\Leftrightarrow$$

$$e^{1-a} \geq e^0 \;\Leftrightarrow\; 1 - a \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a \leq 1\,, \;\text{άτοπο.}$$

Αν $x_1 < 1$ τότε στο $[1, x_2]$ η f γν. φθίνουσα.
Για $x \in (a, x_2)$ έχουμε

$$1 < \alpha < x < x_2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(1) > f(a) > f(x) > f(x_2) \;\Rightarrow\; f(1) > f(x).$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ4.

Για $a = 2, \quad f(x) = 2e^{x-2} - x^2$

Η f είναι κυρτή στο [2, 3] άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Μ(2,f(2)) είναι

$$y - f(2) = f'(2)(x-2)$$

$$y + 2 = -2(x-2)$$

$$y = -2x + 2$$

Επομένως ισχύει

$$f(x) \geq -2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$.

Οπότε

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$$

Για τον υπολογισμό του $\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$

Θέτουμε $\sqrt{x-2} = u \Rightarrow x - 2 = u^2 \Rightarrow x = u^2 + 2$

x	2	3
u	0	1

Οπότε $dx = 2udu$

$$\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx = \int_0^1 [-2(u^2+2)+2]\cdot u \cdot 2u\,du$$

$$= \int_0^1 [-2u^2 - 2]2u^2\,du = \int_0^1 (-4u^4 - 4u^2)\,du$$

$$= \left[-\frac{4u^5}{5} - \frac{4u^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = \frac{-12-20}{15} = \frac{-32}{15}$$

Επομένως ισχύει

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$$