ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΠΛΗΡΕΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.260

Α2. α) Ψ

β) Πρέπει η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0

Α3. δ

Α4. **α.** Σ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η h ορίζεται στο R. Είναι συνεχής και παραγωγίσιμη , ως πράξεις μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $$h'(x)=\frac{\left(e^x\right)'\left(1+e^{2x}\right)-e^x\left(1+e^{2x}\right)'}{\left(1+e^{2x}\right)^2}=\frac{e^x\left(1+e^{2x}\right)-e^x\cdot 2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}=\frac{e^x\left(1+e^{2x}-2e^{2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$
$$=\frac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

Είναι $$h'(x)=0\Leftrightarrow\frac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^2}=0\Leftrightarrow 1-e^{2x}=0\Leftrightarrow e^{2x}=1\Leftrightarrow x=0$$

$$h'(x)>0\Leftrightarrow\frac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^2}>0\Leftrightarrow 1-e^{2x}>0\Leftrightarrow e^{2x}<1\Leftrightarrow e^{2x}<e^0\Leftrightarrow x<0$$

$h'(x)<0\Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	--

$\mathrm{h}(x)$	$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$

Έτσι η h :

- είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$
- παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το $\mathrm{h}(0)=\dfrac{e^0}{1+e^0}=\dfrac{1}{2}$

Β2. Ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{h}(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}=\dfrac{0}{1+0}=0$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{h}(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(1+e^{2x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^x}=0$$

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A}_1=(-\infty,0]$, άρα

$$\mathrm{h}(\mathrm{A}_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}\mathrm{h}(x),\mathrm{h}(0)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$$

Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A}_2=[0,+\infty)$, άρα

$$\mathrm{h}(\mathrm{A}_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}\mathrm{h}(x),\mathrm{h}(0)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$$

Οπότε $\mathrm{h}(\mathrm{R})=h(\mathrm{A}_1)\cup h(\mathrm{A}_2)=\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

Β3. Η h είναι συνεχής στο R άρα η C_h δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

- Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{h}(x)=0$, από το **Β2**

Άρα η ευθεία $\psi=0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$

- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{h}(x)=0$, από το **Β2**

Άρα η ευθεία $\psi=0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$

Β4. $\displaystyle\int_0^1 e^x h(x)dx=\int_0^1 e^x\cdot\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot 2e^{2x}dx=$

$$\begin{pmatrix}\text{Θέτουμε } u=e^{2x}\text{ ,οπότε } du=(\mathrm{e}\,2^x)'du=2e^{2x}du\\ \text{για } x=0 \text{ είναι } u_1=e^0=1\text{ , για } x=1\text{ είναι } u_2=e^2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}\frac{1}{1+u}\cdot du=\frac{1}{2}\Big[\ln|1+u|\Big]_1^{e^2}=\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+e^2\right)-\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο τρίγωνο ΒΖΕ είναι $\mathrm{BZ}=\mathrm{B\Gamma}-\Gamma\mathrm{Z}=2-x$ και $\mathrm{EB}=x$

Με το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $\mathrm{EZ}^2=\mathrm{EB}^2+\mathrm{ZB}^2=x^2+(2-x)^2 \Leftrightarrow$

$\mathrm{EZ}=\sqrt{x^2+(2-x)^2}=\sqrt{2x^2-4x+4}$

Γ2. Είναι $f(x)=\left(\mathrm{EZH\Theta}\right)=\mathrm{EZ}^2=\left(\sqrt{2x^2-4x+4}\right)^2 \Leftrightarrow$

$f(x)=2x^2-4x+4 \quad , \; 0\le x\le 2$

Γ3. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathrm{A}=[0,2]$, ως πολυωνυμική

Είναι $f'(x)=4x-4$, $\quad f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-4=0 \Leftrightarrow x=1$

x	0		1		2
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	Τ.Μ	↘	Τ.Ε	↗	Τ.Μ

Έτσι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 , το $f(1)=2$ και μέγιστο στο 0 και στο 2 , το $f(0)=f(2)=4$

Άρα το εμβαδό γίνεται μέγιστο για $x=0$ ή $x=2$

Γ4. Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\left[0,2\right]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=4e^{x_0}+1$. Τότε ισχύει

$0\le x_0\le 2 \Rightarrow e^0\le e^{x_0}\le e^2 \Rightarrow 4\le 4e^{x_0}\le 4e^2 \Rightarrow 5\le 4e^{x_0}+1\le 1+4e^2 \Rightarrow$

$5\le f\left(x_0\right)\le 1+4e^2$. Άρα ισχύει $f\left(x_0\right)\ge 5$, που είναι άτοπο. Πράγματι η f έχει μέγιστη τιμή το 4 , άρα για κάθε $x\in[0,2]$ ισχύει $f(x)\le 4$

Άρα δεν υπάρχει $x_0\in\left[0,2\right]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0)=4e^{x_0}+1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το εμβαδό του χωρίου που σχηματίζεται από την $C_{f'}$, τις ευθείες $x=0$, $x=3$ και τον άξονα $x'x$ (**αυτό δεν δόθηκε , το θέμα είναι λανθασμένο**) είναι

$\mathrm{E}=8 \Leftrightarrow -\int_0^2 f'(x)dx+\int_2^3 f'(x)dx=8 \Leftrightarrow -\left[f(x)\right]_0^2+\left[f(x)\right]_2^3=8$

$\Leftrightarrow -\left(f(2)-f(0)\right)+\left(f(3)-f(2)\right)=8 \Leftrightarrow -2f(2)+2+f(3)=8$

$\Leftrightarrow -2f(2)+f(3)=6 \quad (1)$

Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. ενδιάμεσων τιμών στο $\left[0,3\right]$ και επειδή είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη , θα ισχύει $f(0)=f(3)$

Άρα ισχύει $f(3)=f(0)=2$ και από την (1) έχουμε $-2f(2)+2=6 \Leftrightarrow f(2)=-2$

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(1)}{\frac{1}{x}}$, αφού η f' είναι συνεχής

$=\dfrac{-3}{\frac{1}{1}}=-3$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x)-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x)'}{\left(f(x)-2\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{f'(x)}=-\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=f'(0)=0$ και $f'(x)<0$ κοντά στο 0

Δ2. Η $C_{f'}$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $(0,2)$ και πάνω στο $(2,3)$

Άρα ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,2)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,3]$ προκύπτει ότι f $\downarrow[0,2]$ και f $\uparrow[2,3]$

Παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στα σημεία $x_1=0$, $x_2=3$ και ελάχιστο στο $x_3=2$

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$. Οπότε η f είναι κοίλη στο $[0,1]$ και κυρτή στο $[1,3]$. Παρουσιάζει καμπή στο σημείο $x_4=1$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ και ισχύει $f(2)f(3)=-4<0$. Άρα με το Θ.Bolzano υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Το x_0 είναι μοναδικό ,αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)=0$ και $x>x_0\overset{f\uparrow[2,3]}{\Rightarrow}f(x)>f(x_0)=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)=0$ και $x<x_0\overset{f\uparrow[2,3]}{\Rightarrow}f(x)<f(x_0)=0$

Άρα δεν υπάρχει το όριο της f στο x_0

Έστω $u\in(2,x_0)\cup(x_0,3)$. Τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to u}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{f(u)}\in R$, αφού $f(u)\neq0$

Οπότε το $x_0\in(2,3)$ είναι μοναδικό στο οποίο δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$

Δ4.